باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی(ره)»

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

آزمون مرحله اول

بیستمین دورهٔ المپیاد نجوم واخترفیزیک

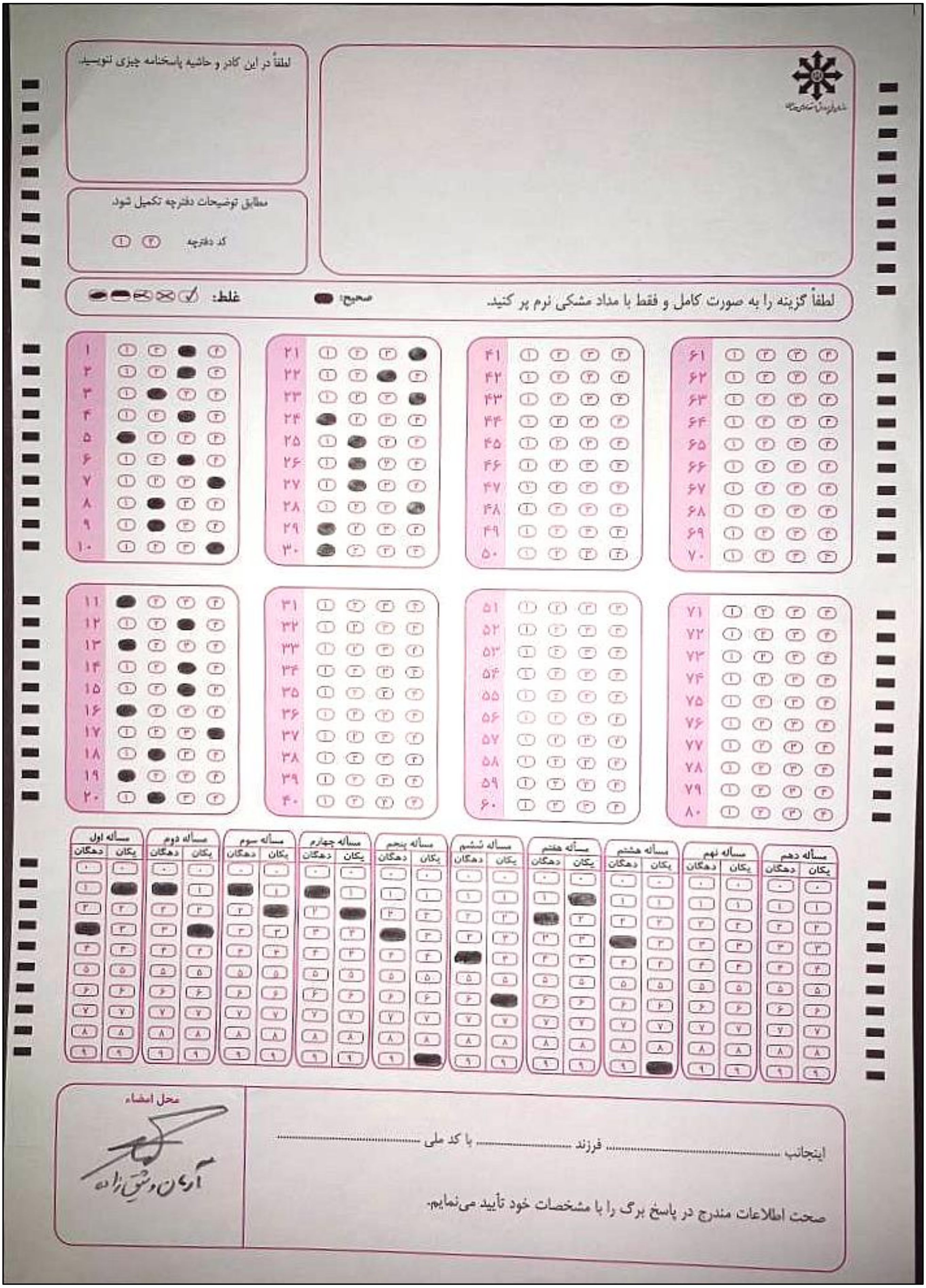
کمیته‌ی علمی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بهمن ماه ۱۴۰۲

از اساتید و دانش‌پژهان گرامی دعوت می‌شود تا نظرات و پیشنهادات خود را به نشانی الکترونیکی کمیته‌ی المپیاد نجوم ایران ارسال نمایند.

IRAstronomyCommittee@gmail.com

پاسخنامه تستی:



لطفاً در این کادر و حاشیه پاسخنامه چیزی ننویسید.

مطابق توضیحات دفترچه تکمیل شود.

کد دفترچه ۱ ۲

لطفاً گزینه را به صورت کامل و فقط با مداد مشکی نرم پر کنید. صحیح: غلط:

مسأله اول، مسأله دوم، مسأله سوم، مسأله چهارم، مسأله پنجم، مسأله ششم، مسأله هفتم، مسأله هشتم، مسأله نهم، مسأله دهم

یکان دهگان

محل امضاء

اینجانب .... فرزند .... با کد ملی ....

صحت اطلاعات مندرج در پاسخ برگ را با مشخصات خود تأیید می‌نمایم.

❄ برای یافتن گزینه‌ی صحیح در سوالات محاسباتی، جواب بدست آمده را به نزدیکترین گزینه گرد کنید.

❄ قسمت محاسبات هر سوال، تصویر اسکرین شات (Screenshot) از صفحه‌ی ماشین حساب آنلاین می‌باشد.

سوال ۱ – (گزینه ۳) برای حل این سوال کافیست اندازه‌ی زاویه‌ای اجسام خواسته شده را در فاصله‌های داده شده بر حسب میکروثانیه‌ی‌قوسی با استفاده از رابطه‌ی زیر پیدا کنیم.

$$\theta^{micro\ arcsec} = (\frac{D}{d})^{rad} \times 206265 \times 10^6$$

در این رابطه D اندازه‌ی جسم مورد نظر و d فاصله تا آن جسم می‌باشد.

<u>اندازه زاویه ای یک خودکار در کره ماه:</u>

طول متوسط خودکار= ۱۵ سانتی‌متر / فاصله‌ی زمین تا ماه= مراجعه به جدول ثوابت

$$\theta^{arcsec} = (\frac{15 \times 10^{-2}}{3.84 \times 10^8})^{rad} \times 206265 \times 10^6 = \mathbf{80.57}\ micro\ arcsec$$

<u>اندازه زاویه ای یک اتوبوس در سیاره مریخ:</u>

طول متوسط اتوبوس= ۲۰ متر / فاصله‌ی زمین تا مریخ در نزدیکترین فاصله= ۰.۵ واحد نجومی

$$\theta^{arcsec} = (\frac{20}{0.5 \times 1.5 \times 10^{11}})^{rad} \times 206265 \times 10^6 = \mathbf{55}\ micro\ arcsec$$

<u>اندازه زاویه‌ای تار مو در زاهدان از تبریز:</u>

ضخامت متوسط یک تار مو: ۱۰۰ میکرون

فاصله‌ی زاهدان تا تبریز: ۱۶۰۰ کیلومتر

$$\theta^{arcsec} = (\frac{100 \times 10^{-6}}{1600 \times 10^3})^{rad} \times 206265 \times 10^6 = \mathbf{12.9}\ micro\ arcsec$$

<u>اندازه زمین فوتبال روی سیاره مشتری:</u>

طول زمین فوتبال: ۱۰۰ متر

فاصله‌ی زمین تا مشتری در نزدیکترین فاصله= ۴.۲ واحد نجومی

$$\theta^{arcsec} = (\frac{100}{4.2 \times 1.5 \times 10^{11}})^{rad} \times 206265 \times 10^6 = \mathbf{275}\ micro\ arcsec$$

با مقایسه‌ی گزینه‌ها (حتی اگر تخمین‌ها مقداری خطا داشته باشد) گزینه‌ای که شامل کمترین عدد می‌باشد که از ۲۰ میکروثانیه‌ی قوسی نیز کمتر است را به عنوان گزینه صحیح انتخاب می‌کنیم. یعنی گزینه‌ی ۳. تلسکوپ گایا با توان تفکیک ۲۰ میکروثاینه قوسی نمی‌تواند یک تار مو در زاهدان را از شهر تبریز تفکیک کند. اما نکته‌ی جالب این است با مرور دوباره‌ی گزینه‌ها به توان تفکیک فوق‌العاده‌ی این تلسکوپ پی می‌بریم.

محاسبات سوال ۱:

$$\frac{15 \cdot 10^{-2}}{3.84 \cdot 10^{8}} \cdot 206\,265 \cdot 10^{6} = 80.57226563$$

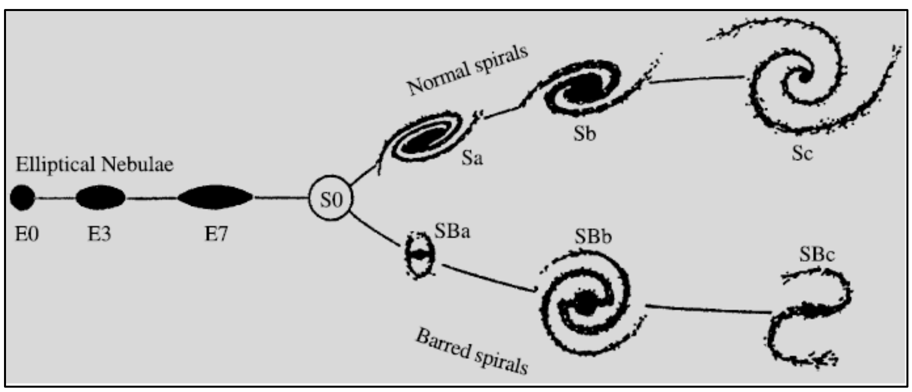
$$\frac{20}{0.5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}} \cdot 206\,265 \cdot 10^{6} = 55.004$$

$$\frac{100 \cdot 10^{-6}}{1600 \cdot 10^{3}} \cdot 206\,265 \cdot 10^{6} = 12.8915625$$

$$\frac{100}{0.5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}} \cdot 206\,265 \cdot 10^{6} = 275.02$$

سوال ۲ – (گزینه ۳)

با توجه به طبقه‌بندی هابل با توجه به تصویر زیر می‌دانیم که این کهکشان یک کهکشان بیضوی یا میله‌ای نیست پس گزینه‌ی ۲ و ۴ حذف می‌شوند. با مقایسه هاله‌ی مرکزی این کهکشان با کهکشان‌های مارپیچی در طبقه‌بندی هابل، با توجه به کوچک بودن هاله‌ی مرکزی می‌توان دریافت که این کهکشان در گروه **Sc** قرار می‌گیرد.



تصویر از فصل ۱۹ کتاب Fundamental Astronomy.

سوال ۳ – (گزینه ۲)

چون در طی مسیر عرض جغرافیایی فرد عوض نشده پس باید روی یک دایره صغیره به موازات استوا حرکت کند. می‌دانیم که طول کمان دایره صغیره از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$A'B' = AB.\cos(\varphi)$$

پس کمانی متناظر که روی استوا طی شده است برابر است با:

$$AB = \frac{A'B'}{\cos(\varphi)}$$

$$AB = \frac{1000}{\cos(35.5)} \to AB = 1228\ km$$

که اختلاف زاویه‌ای متناظر این فاصله برابر است با:

$$\Delta l = \frac{AB}{2\pi R} \times 360 \to \Delta l = \frac{1228}{2\pi \times 6371} \times 360 = \mathbf{11}^{\circ}$$

محاسبات سوال ۳:

$\frac{1000}{\cos(35.5)}$	$= 1228.326911$
$\frac{\boxed{1228.326911}_{\text{ans}}}{2\pi \cdot 6371} \cdot 360$	$= 11.0466093$

سوال ۴- (گزینه ۳)

دو ستاره خورشیدگون هستند و در یک خوشه ستاره‌ای قرار دارند پس درخشندگی و فاصله‌ی آن دو ستاره و درنتیجه روشنایی آن‌ها از دید ناظر یکسان است. زمان نوردهی A دوبرابر زمان نوردهی B است پس انرژی ثبت شده از ستاره‌ی A دوبرابر ستاره‌ی B است.

$$\frac{E_A}{E_b} = 2$$

$$m_A - m_B = -2.5 \log\left(\frac{E_A}{E_b}\right) \rightarrow\ m_A - m_B = -2.5 \log(2) \rightarrow\ m_A - m_B =\ -0.75$$

پس اختلاف قدر برابر است با $\mathbf{0.75}$ قدر.

محاسبات سوال ۴:

$-2.5 \cdot \log(2)$	$= -0.7525749892$

سوال ۵ - (گزینه ۱)

هنگامی که سیاره‌ای فراخورشیدی جلوی ستاره‌ی منظومه قرار می‌گیرد به اندازه‌ی سطح مقطع πR_p^2 جلوی نور ستاره به شعاع را می‌گیرد و قدر ظاهری ستاره به اندازه‌ی Δm افزایش می‌یابد. اگر روشنایی سطحی ستاره با شعاع R_s را b_s در نظر بگیریم، نسبت روشنایی دریافتی از سیستم وقتی سیاره مقابل ستاره قرار دارد به حالتی که سیاره مقابل ستاره قرار دارد برابر است با:

$$\frac{b_s(\pi R_s^2 - \pi R_p^2)}{b_s\, \pi R_s^2}$$

طبق فرض سوال حداقل اختلاف قدر قابل آشکارسازی سیستم بین دو حالت فوق برابر 0.0001 می‌باشد، پس داریم:

$$\Delta m = -2.5\log\left(\frac{b_s\left(\pi R_s^2 - \pi R_p^2\right)}{b_s\, \pi R_s^2}\right) \to \Delta m = -2.5\log(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2}) \to 0.0001 = -2.5\log(1 - \frac{R_p^2}{R_s^2})$$

از معادله‌ی فوق مقدار شعاع سیاره بر حسب شعاع خورشید بدست می‌آید:

$$R_p = 0.0096\, R_s \to R_p = 6.68 \times 10^6\ m$$

با نگاهی به گزینه‌ها متوجه می‌شویم که این عدد را باید بر حسب شعاع زمین یا مشتری محاسبه کنیم. با تقسیم این عدد بر شعاع زمین خواهیم داشت:

$$R_p = \mathbf{1.05}\ \boldsymbol{R_\oplus}$$

محاسبات سوال ۵:

$$\frac{0.0001}{-2.5} = -4 \times 10^{-5}$$

$$10^{-4\times10^{-5}} = 0.9999079008$$

$$1 - 0.9999079008 = 9.20991623 \times 10^{-5}$$

$$\sqrt{9.20991623\times10^{-5}} = 0.009596830848$$

$$0.009596830848 \cdot 6.96 \cdot 10^8 = 6679394.27$$

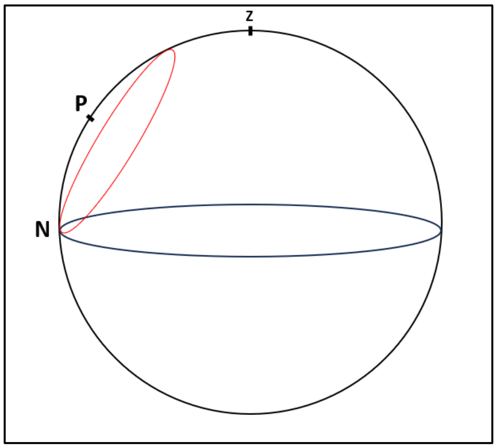
$$\frac{6679394.27}{6371 \cdot 10^3} = 1.048405944$$

سوال ۶ – (گزینه ۳)

ابتدا میل ستاره‌ی قطبی کنونی که در قدیم در شهر سومر با عرض جغرافیایی ۳۳.۳ درجه‌ی شمالی غروب نمی‌کرده و تنها با افق مماس می‌شده را حساب می‌کنیم. دایره‌صغیره قرمز مسیر حرکت این ستاره را نشان می‌دهد.

کمان PN برابر عرض جغرافیایی ناظر (φ) و همچنین برابر $(90-\delta)$ برای ستاره است. پس می‌توان فهمید در آن زمان میل ستاره قطبی را محاسبه کرد.

$$90-\delta=\varphi \rightarrow \delta=90-\varphi \rightarrow \delta=90-33.3 \rightarrow \delta=56.7$$



پس باید زمانی را حساب کنیم که میل ستاره‌ی قطبی کنونی برابر ۵۶.۷ درجه بوده است.

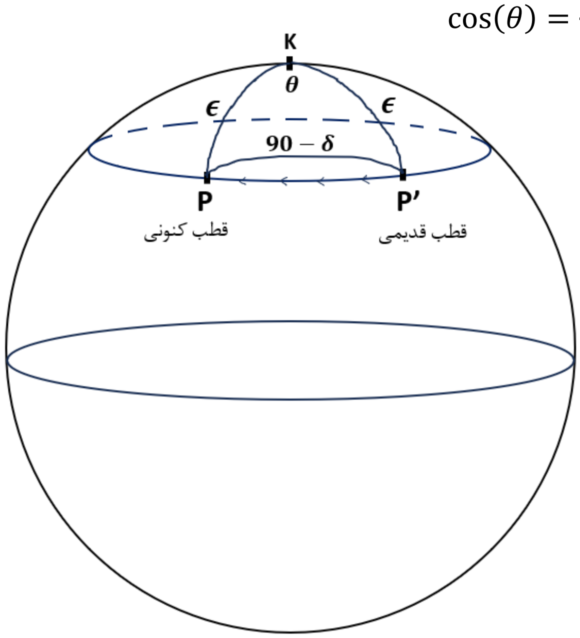
با توجه به حرکت تقدیمی می‌دانیم که قطب شمال سماوی روی یک دایره صغیره به فاصله‌ی ۲۳.۵ درجه از قطب شمال دایره‌البروج روی یک دایره صغیره به موازات دایره‌البروج در مدت زمان ۲۶۰۰۰ سال (طبق جدول ثوابت) است. حال کافیست زاویه‌ی θ را محاسبه کنیم و از روی آن مدت زمان را بدست آوریم.

در مثلث PKP' رابطه‌ی کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\cos(90-\delta)=\cos(\epsilon)\cos(\epsilon)+\sin(\epsilon)\sin(\epsilon)\cos(\theta)$$

$$\sin(\delta)=\cos^2(\epsilon)+\sin^2(\epsilon)\cos(\theta) \rightarrow \cos(\theta)=\frac{\sin(\delta)-\cos^2(\epsilon)}{\sin^2(\epsilon)}$$

$$\cos(\theta)=\frac{\sin(56.7)-\cos^2(23.5)}{\sin^2(23.5)} \rightarrow \theta=91.78^{\circ}$$



حال مدت زمان طی شدن این زاویه بر اثر حرکت تقدیمی را محاسبه می‌کنیم:

سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی: $\omega=\frac{360}{26000}\frac{deg}{yr}$

$$t=\frac{\theta}{\omega} \rightarrow t=\frac{91.87}{\frac{360}{26000}} \rightarrow t=6635\,yr$$

با توجه به اینکه در سال ۲۰۲۴ میلادی قرار داریم و این رویداد ۶۶۳۵ سال قبل رخ داده است می‌توانیم تاریخ خواسته شده را بر حسب سال میلادی بدست آوریم با توجه به اینکه در سال ۲۰۲۴ هستیم:

$$2024-6635=-4611$$

با توجه به گزینه‌ها و گرد کردن عدد فوق تاریخ مورد سوال حدود **۵۰۰۰ سال قبل میلاد** بوده است.

محاسبات سوال ۶:

$90-33.3$	$=56.7$
$\dfrac{\sin(56.7)-\cos^2(23.5)}{\sin^2(23.5)}$	$=-0.03265277917$
$\cos^{-1}(\boxed{-0.03265277917})$	$=91.87119905$
$\dfrac{\boxed{91.87119905}}{\frac{360}{26000}}$	$=6635.142154$
$2024-6635$	$=-4611$

سوال ۷ – (گزینه ۴)

قدر ماه کامل برابر ۱۲.۷- (جدول ثوابت) است. طبق خواسته‌ی سوال خورشید از پشت یک تلسکوپ ۵ اینچی باید به همین قدر دیده شود. ابتدا محاسبه می‌کنیم که جسمی که با این قدر از پشت تلسکوپ دیده می‌شود واقعا چه قدری دارد.

برای این تلسکوپ توان گردآوری نور را بدست می‌آوریم: $LGP = (\frac{D_T}{D_e})^2 \rightarrow LGP = (\frac{5\times25}{6})^2 \rightarrow LGP = 434$

$$m_T - m_e = -2.5\log(LGP) \rightarrow m_e = m_T + 2.5\log(LGP) \rightarrow m_e = -6.1$$

پس اگر قدر ظاهری خورشید در آسمان -6.1 باشد ما در تلسکوپ ۵ اینچی آن را به روشنی ماه کامل خواهیم داد. اما می‌دانیم که قدر ظاهری خورشید در آسمان ۲۶.۷- است. پس می‌توانیم حساب کنیم که نسبت روشنایی در دو حالت فوق چقدر است و این یعنی فیلتر ماه چه کسری از نور را باید عبور دهد.

$$m_1 - m_2 = -2.5\log\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \rightarrow -6.1-(-26.7) = -2.5\log\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \rightarrow \frac{b_1}{b_2} = 5.8\times10^{-9}$$

عدد فوق را اگر گرد کنیم حاصل برابر می‌شود با: $\mathbf{10^{-8}}$

محاسبات سوال ۷:

$$\left(\frac{5\cdot25}{6}\right)^2 = 434.0277778$$

$$-12.7+2.5\log(434.0277778) = -6.106206187$$

$$\frac{-6.106206187-(-26.7)}{-2.5} = -8.237517525$$

$$10^{-8.237517525} = 5.78738634\times10^{-9}$$

سوال ۸ – (گزینه ۲)

با توجه به قانون گرانش، رابطه‌ی نیروی گرانش و شتاب در حرکت دایره‌ای را می‌نویسیم:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \quad (I)$$

مقدار جرم مرکزی که به هر ستاره نیرو وارد می‌کند، مجموع جرم سیاه‌چاله‌ی مرکزی و جرم هاله‌ی کهکشان در داخل مدار ستاره است.

$$M = M_{BH} + M_{Halo}$$

برای بدست آوردن جرم هاله باید از تابع چگالی استفاده کنیم:

$$\rho = \frac{\alpha}{4\pi r^2} \rightarrow \frac{dm}{dv} = \frac{\alpha}{4\pi r^2} \rightarrow dm = \frac{\alpha}{4\pi r^2}\, dv$$

از طرفی المان حجم برابر است با:

$$dv = 4\pi r^2\, dr$$

بنابراین:

$$dm = \frac{\alpha}{4\pi r^2}\, 4\pi r^2\, dr \rightarrow dm = \alpha\, dr \rightarrow \int dm = \int_0^r \alpha\, dr \rightarrow M_{Halo} = \alpha r$$

پس کل جرم برابر است با:

$$M = M_{BH} + \alpha R$$

با جایگذاری در رابطه‌ی از (I) داریم:

$$v^2 = \frac{G(M_{BH} + \alpha R)}{r} \rightarrow M_{BH} + \alpha r = \frac{v^2\, r}{G} \rightarrow \ \alpha r = \frac{v^2\, r}{G} - M_{BH}$$

$$\alpha = \frac{v^2}{G} - \frac{M_{BH}}{r} \rightarrow \ \alpha = \frac{(100 \times 10^3)^2}{6.67 \times 10^{-11}} - \frac{4 \times 10^6 \times 1.99 \times 10^{30}}{2 \times 3.09 \times 10^{16}}$$

$$\alpha = 2.1 \times 10^{19}\, \frac{kg}{m} \rightarrow \alpha = 2.1 \times 10^{19}\, \frac{3.09 \times 10^{16}}{1.99 \times 10^{30}} = 3.3 \times 10^5\, \frac{M_\odot}{pc} \rightarrow \boldsymbol{\alpha \approx 300000\, \frac{M_\odot}{pc}}$$

محاسبات سوال ۸:

$$\frac{\left(100 \cdot 10^3\right)^2}{6.67 \cdot 10^{-11}} - \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 3.09 \cdot 10^{16}} = 2.11224485 \times 10^{19}$$

$$\boxed{2.11224485\times10^{19}} \cdot \frac{3.09 \cdot 10^{16}}{1.99 \cdot 10^{30}} = 327\,981.7378$$

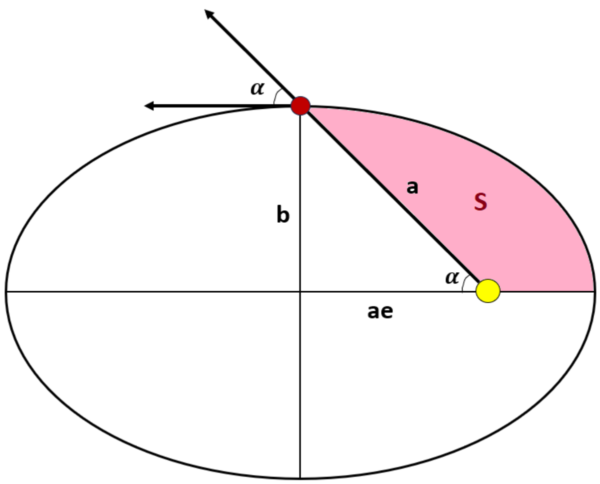
سوال ۹ – (گزینه ۲)

دنباله‌ی گازی یا دنباله‌ی یونی دنباله‌دار همواره در جهت مخالف خورشید و به بیان دیگر در راستای بردار شعاعی دنباله‌دار در مدارش قرار دارد. پس منظور از زاویه‌ی بین دنباله‌ی گازی و راستای حرکت دنباله‌دار، زاویه‌ی بین بردار شعاعی و سرعت دنباله‌دار است.

با توجه به خروج از مرکز داده شده (۰.۵) و ساختار بیضی می‌توان حدس که جسم در راس نیم‌قطر اقصر قرار دارد.

$$\cos(\alpha) = \frac{ae}{a} \rightarrow \cos(\alpha) = e \rightarrow \cos(\alpha) = 0.5 \rightarrow \alpha = 60^{\circ}$$

پس می‌بینیم وقتی دنباله‌دار در راس نیم‌قطر اقصر قرار داشته باشد زاویه‌ی بین بردار شعاعی و بردار سرعت آن برابر ۶۰ درجه می‌شود. حال باید حساب کنیم چقدر طول می‌کشد تا دنباله‌دار از حضیض به راس نیم‌قطر اقصر برسد. در نظر داشته باشید اگر چرخش دنباله‌دار را ساعتگرد در نظر بگیریم تفاوتی در جواب مسئله ایجاد نمی‌شود! برای محاسبه‌ی زمان باید از قانون دوم کپلر استفاده کنیم:



$$\frac{t}{T} = \frac{S}{S_{\text{کل}}}$$

$$S = \frac{1}{4}\pi ab - \frac{ae.b}{2}$$

$$S_{\text{کل}} = \pi ab$$

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{1}{4}\pi ab - \frac{ae.b}{2}}{\pi ab} = \frac{\frac{1}{4}\pi - \frac{e}{2}}{\pi} \rightarrow \frac{\frac{1}{4}\pi - \frac{0.5}{2}}{\pi} \rightarrow \frac{t}{T} = 0.17 \rightarrow t = \mathbf{0.17\,T}$$

محاسبات سوال ۹:

$\cos^{-1}(0.5)$	$= 60$
$\frac{\frac{1}{4}\pi - \frac{0.5}{2}}{\pi}$	$= 0.1704225285$

سوال ۱۰ – (گزینه ۴)

ابتدا رابطه‌ی بین جرم و شعاع سیاهچاله را بررسی می‌کنیم، می‌دانیم شعاع شواتزشیلد برابر است با:

$$R_{sch} = \frac{2GM}{c^2}$$

با توجه به محیط دایره می‌توان نوشت:

$$\text{محیط} = 2\pi R_{sch} = \frac{4\pi GM}{c^2} \xrightarrow{K=\frac{4\pi G}{c^2}} \text{محیط} = K\ M$$

پس رابطه‌ی بین محیط و جرم سیاهچاله خطی است. یعنی نمودار C مربوط به سیاهچاله است:

$$C = BH$$

با استفاده از همین نکته گزینه صحیح (گزینه ۴) مشخص خواهد شد.

در مورد کوتوله سفید طبق حد چاندراسکار می‌دانیم که آستانه‌ی جرم ثابتی (۱.۴۴برابر جرم خورشید) دارد.

ستاره نوترونی نیز آستانه‌ی جرم ثابتی (۱.۴ تا ۳ برابر جرم خورشید) دارد.

پس دو منحنی A و B که آستانه‌ی جرم ثابت دارند مربوط به این دو هستند. منحنی B آستانه‌ی جرمی بیشتری دارد و در مجموع شعاع آن کوچکتر است پس متعلق به ستاره نوترونی است:

$$B = NS$$

و منحنی A مربوط به کوتوله سفید خواهد بود:

$$A = WD$$

در نهایت جواب به این صورت خواهد بود:

$$\boldsymbol{A = WD\ , B = NS\ , C = BH}$$

سوال ۱۱ - (گزینه ۱)

ابتدا انرژی هر لایه را حساب کرده و برای محاسبه‌ی انرژی آزاد شده در هر گذار انرژی لایه‌های مربوط را از هم کم می‌کنیم.

با توجه به جدول ثوابت انرژی یونش اتم هیدروژن برابر انرژی تراز اول است و برابر است با:

$$E_1 = 13.6\ eV$$

خط طیفی لیمان آلفا: گذار از لایه دوم به لایه اول:

انرژی لایه دوم: $E_2 = \frac{13.6}{2^2} = 3.4\ eV$

$$E_1 - E_2 = 13.6 - 3.4 = 10.2\ eV = 1.63 \times 10^{-18}\ J$$

خط طیفی اچ آلفا: گذار از لایه سوم به دوم:

انرژی لایه سوم: $E_2 = \frac{13.6}{3^2} = 1.51\ eV$

$$E_2 - E_3 = 3.4 - 1.51 = 1.89\ eV = 3.02 \times 10^{-19}\ J$$

حال طول موج مربوط به هر انرژی را محاسبه می‌کنیم:

$$E = h\frac{c}{\lambda} \to \lambda = \frac{hc}{E}$$

لیمان آلفا: $\lambda^{nm} = \frac{hc}{1.63\times10^{-18}} \times 10^9 = \mathbf{121.9\ nm}$

اچ آلفا: $\lambda^{nm} = \frac{hc}{3.02\times10^{-19}} \times 10^9 = \mathbf{657.7\ nm}$

محاسبات سوال ۱۱:

$\frac{13.6}{2^2}$	$= 3.4$
$(13.6 - 3.4) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}$	$= 1.632 \times 10^{-18}$
$\frac{13.6}{3^2}$	$= 1.511111111$
$(3.4 - 1.51) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}$	$= 3.024 \times 10^{-19}$
$\frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.632 \times 10^{-18}} \cdot 10^9$	$= 121.875$
$\frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3.024 \times 10^{-19}} \cdot 10^9$	$= 657.7380952$

سوال ۱۲ - (گزینه ۳)

حرکت ستاره‌ها از دید ما را می‌توان به دو حرکت مماسی و حرکت شعاعی تجزیه کرد. سرعت خاصه‌ی ستاره مربوط به حرکت مماسی است و سرعت شعاعی معمولا با استفاده از طیف‌نگاری و اثر داپلر قابل اندازه‌گیری است.

ابتدا سرعت ستاره را در راستای مماسی محاسبه می‌کنیم. با توجه به آنکه $v = \omega . r$ می‌توان سرعت مماسی را بدست آورد. از طرفی با توجه به اختلاف منظر فاصله‌ی ستاره برابر است با: $d = \frac{1}{P} \rightarrow d = \frac{1}{0.2} \rightarrow d = 5\,pc$

$$v_{\perp} = \mu . d \rightarrow v_{\perp} = 2.5 \times \frac{1}{206265} \times \frac{1}{365 \times 24 \times 60 \times 60} \times 5 \times 206265 \times 1.5 \times 10^{11} \times 10^{-3} = 59.4\ \frac{km}{s}$$

برای محاسبه سرعت شعاعی از اثر داپلر استفاده می‌کنیم. می‌دانیم طول موج مربوط به خط طیفی $Pa - \alpha$ برابر است با $1875\ nm$

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \rightarrow v_r = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} c \rightarrow v_r = \frac{1870 - 1875}{1875} \times 3 \times 10^8 \times 10^{-3} \rightarrow v_r = -800\ \frac{km}{s}$$

سرعت حرکت ستاره برابر است با:

$$v = \sqrt{{v_{\perp}}^2 + {v_r}^2} \rightarrow v = \sqrt{59.4^2 + 800^2} \rightarrow v = 802.2\ \frac{km}{s}$$

مسافتی که در یک ۱۰۰۰ سال طی می‌کند برابر است با:

$$x = vt \rightarrow x = 802.2 \times 10^3 \times 1000 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times \frac{1}{3.09 \times 10^{16}} \rightarrow x = \mathbf{0.8\ pc}$$

تبدیل ثانیه قوسی به رادیان - تبدیل سال و ثانیه - تبدیل پارسک و متر - تبدیل متر و کیلومتر

محاسبات سوال ۱۲:

$\frac{1}{0.2}$	$= 5$
$2.5 \cdot \frac{1}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-3}$	$= 59.45585997$
$\frac{1870 - 1875}{1875} \cdot 3 \cdot 10^{8}$	$= -800000$
$\sqrt{59.4^2 + 800^2}$	$= 802.202194$
$\boxed{802.202194} \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$	$= 2.52982484 \times 10^{16}$
$\frac{\boxed{2.52982484 \times 10^{16}}}{3.09 \cdot 10^{16}}$	$= 0.8187135401$

سوال ۱۳ - (گزینه ۱)

ابتدا انرژی جذب شده توسط مریخ از خورشید را محاسبه می‌کنیم، این انرژی سیاره را به دمای T_{eff} می‌رساند و با جسم سیاه در نظر گرفتن مریخ این مقدار، همان انرژی است که تابش می‌کند:

انرژی جذب شده توسط مریخ در ۱ ثانیه:

$$E = b_{\odot}.S_{eff}.(1-A) \rightarrow E = \frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \cdot \pi\, {r_m}^2 \cdot (1-A)$$

انرژی تابش شده از مریخ در ۱ ثانیه:

$$E = 4\pi {r_m}^2 \sigma {T_{eff}}^4$$

مقدار این دو انرژی را با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم تا دما را بدست آوریم:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} \cdot \pi\, {r_m}^2 \cdot (1-A) = 4\pi {r_m}^2 \sigma {T_{eff}}^4 \rightarrow T_{eff} = \sqrt[4]{\frac{L_{\odot}(1-A)}{16\,\pi\, d^2\, \sigma}}$$

$$T_{eff} = \sqrt[4]{\frac{3.85\times 10^{26}\times(1-0.17)}{16\pi\times(1.5\times 1.5\times 10^{11})^2\times\ 5.67\times 10^{-8}}} \rightarrow T_{eff} \approx 217\ K \xrightarrow{-273} \boldsymbol{T_{eff} = -56°C}$$

محاسبات سوال ۱۳:

$$\sqrt[4]{\frac{3.85\cdot 10^{26}\cdot(1-0.17)}{16\pi\cdot\left(1.5\cdot 1.5\cdot 10^{11}\right)^2\cdot 5.67\cdot 10^{-8}}} = 216.9352956$$

$$\underset{\text{ans}}{\boxed{216.9352956}} - 273 = -56.06470444$$

سوال ۱۴ - (گزینه ۳)

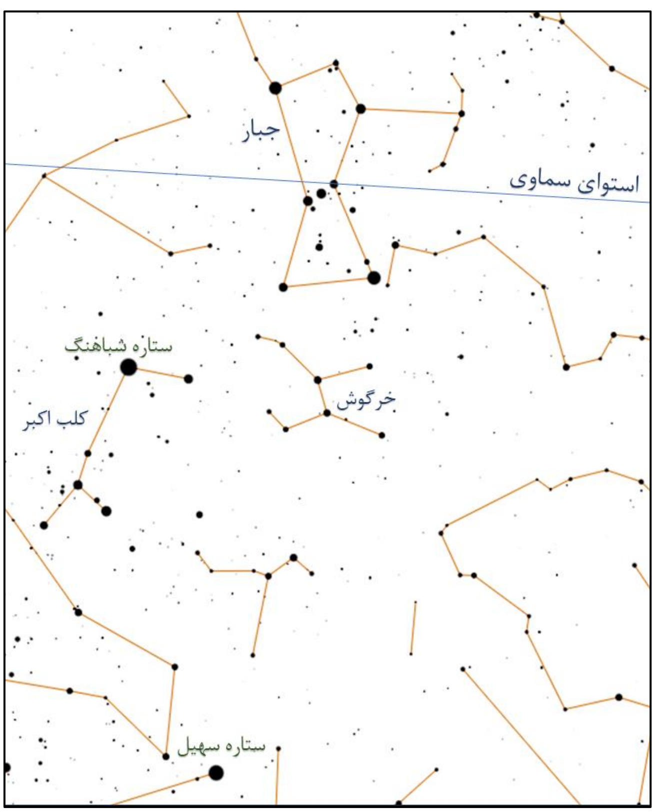
به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم.

گزینه ۱) صورت فلکی خرگوش در پایین صورت فلکی جبار قرار دارد و پرنورترین ستاره‌ی آسمان یعنی شباهنگ در صورت فلکی کلب‌اکبر در سمت چپ تصویر قرار دارد. پس این گزینه صحیح است.

گزینه ۲) در صورت فلکی جبار، سحابی جبار (m42) با قدری حدود 4 از پرنورترین اجرام غیرستاره‌ای آسمان است که می‌توان آن را با چشم غیرمسلح در آسمانی تاریک به صورت هاله‌ای بسیار کوچک رصد کرد. پس این گزینه صحیح است.

گزینه ۳) کافیست تا در زمستان یکبار به آسمان چشم دوخته باشیم تا شش ضلعی زمستانی که یکی از رئوس آن ستاره‌ی ابط‌الجوزا است به همراه صورت فلکی درخشان جبار را در آسمان رصد کرده باشیم. ستاره‌ی شباهنگ نیز به عنوان پرنورترین ستاره‌ی آسمان در شب های فصل زمستان قابل رویت است. **پس این گزینه غلط است.**

گزینه ۴) استوای سماوی از نزدیکی سه ستاره‌ی معروف به کمربند جبار می‌گذرد و ستاره‌ی پرنور در پایین تصویر ستاره‌ی سهیل است. پس این گزینه صحیح است.



سوال ۱۵ - (گزینه ۳)

با توجه به چگالی انرژی تابشی می‌توان نوشت:

$$u_{rad} = u_{rad_0} a^{-4} \xrightarrow{u=\frac{4\sigma}{c}T^4} T_{CMB}^4 = T_{CMB_0}^4\, a^{-4}$$

$$T_{CMB_0} = a\, T_{CMB} \xrightarrow{a=\frac{1}{1+z}} T_{CMB_0} = \frac{T_{CMB}}{1+z} \rightarrow T_{CMB} = T_{CMB_0}(1+z)$$

$$T_{CMB_{dec}} = 2.7 \times (1 + z_{dec})$$

با توجه به جدول ثوابت میزان قرمزگرایی زمان واجفتیدگی برابر 1089 می‌باشد. بنابراین:

$$T_{CMB_{dec}} = 2.7 \times (1 + 1089) \rightarrow T_{CMB_{dec}} = 2943\ K$$

حال برای محاسبه‌ی انرژی در حجم معادل یک کوله پشتی باید چگالی انرژی را در حجم کوله ضرب کنیم.

ابتدا حجم یک کوله پشتی را تخمین می‌زنیم:

$$V = 0.5 \times 0.3 \times 0.2 \rightarrow V = 0.03\ m^3$$

پس انرژی برابر است با:

$$E = V \frac{4\sigma}{c} T_{CMB_{dec}}^4 \rightarrow E = 0.03 \times \frac{4 \times 5.67 \times 10^{-8}}{3 \times 10^8} \rightarrow E = 1.7 \times 10^{-3} \rightarrow \boldsymbol{E \approx 10^{-3}}$$

محاسبات سوال ۱۵:

$2.7 \cdot (1 + 1089)$	$= 2943$
$0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.2$	$= 0.03$
$0.03 \cdot \frac{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^8} \cdot 2943^4$	$= 0.001701390873$

سوال ۱۶ – (گزینه ۱)

ابتدا با استفاده از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم در مدار بیضوی، مقدار آن را در حضیض و اوج (جایی که زاویه بین سرعت و بردار شعاع ۹۰ درجه است) برابر قرار می‌دهیم و خروج از مرکز مدار جسم اول را بدست می‌آوریم:

$$r_p v_p = r_A v_A \rightarrow \frac{v_p}{v_p} = \frac{r_A}{r_p} = 4 \rightarrow \frac{a(1-e)}{a(1+e)} = 4 \rightarrow 1+e = 4-4e \rightarrow e = \frac{3}{5} = 0.6$$

حال باید مساحت جاروب شده توسط این جسم را در یک سوم دوره تناوب محاسبه کنیم، برای این کار از قانون دوم کپلر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{S}{S_{\text{کل}}} = \frac{\frac{1}{3}T}{T} \rightarrow S = \frac{1}{3}S_{\text{کل}} \rightarrow S = \frac{1}{3}\pi ab \xrightarrow{b=a\sqrt{1-e^2}} S = \frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

از طرفی مساحت جاروب شده توسط جسم دوم در مدار دایروی برابر یک سوم مساحت دایره است چون جسم در مدار دایروی با آهنگ ثابت در حرکت است، پس مساحت جاروب شده توسط جسم دوم برابراست با:

$$SS = \frac{1}{3}\pi a^2$$

نسبت این دو مقدار برابر است با:

$$\frac{S}{SS} = \frac{\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\frac{1}{3}\pi a^2} = \sqrt{1-e^2} \rightarrow \frac{S}{SS} = \sqrt{1-0.6^2} \rightarrow \frac{S}{SS} = \mathbf{0.8}$$

محاسبات سوال ۱۶:

$\frac{3}{5}$	$= 0.6$
$\sqrt{1-0.6^2}$	$= 0.8$

سوال ۱۷ – (گزینه ۴)

برای حل این سوال، نسبت جرم به درخشندگی را برای اجرام داده شده حساب می‌کنیم.

جرم و درخشندگی را در هر مورد برحسب جرم و درخشندگی خورشید محاسبه می‌کنیم:

WD: کوتوله ی سفید به جرم خورشید و دمای سطحی ۲۰۰۰۰ کلوین

جرم کوتوله سفید را ۱.۴۴ برابر جرم خورشید و شعاع آن را به اندازه‌ی شعاع زمین در نظر می‌گیریم.

$$(\frac{M}{L})_{WD} = \frac{1.44 M_\odot}{\left(\frac{6371 \times 10^3}{6.96 \times 10^8}\right)^2 \left(\frac{20000}{5777}\right)^4} \rightarrow \ (\boldsymbol{\frac{M}{L}})_{\boldsymbol{WD}} \approx \mathbf{120}\ \boldsymbol{\frac{M_\odot}{L_\odot}}$$

SS : منظومه ی شمسی

با توجه به اینکه بیش از ۹۹ درصد جرم و درخشندگی منظومه شمسی مربوط به خورشید است، در نتیجه:

$$(\boldsymbol{\frac{M}{L}})_{\boldsymbol{SS}} = \boldsymbol{\frac{M_\odot}{L_\odot}}$$

GS : ستاره ای به جرم خورشید در شاخه ی غول قرمز

جرم غول قرمز برابر جرم خورشید، با تقریب زدن دمای ثابت می‌توانیم بنویسیم شعاع غول سرخ ۱۰ برابر شعاع خورشید است:

$$(\frac{M}{L})_{GS} = \frac{M_\odot}{\left(\frac{10R_\odot}{R_\odot}\right)^2} \rightarrow \ (\boldsymbol{\frac{M}{L}})_{\boldsymbol{GS}} = \mathbf{0.01}\ \boldsymbol{\frac{M_\odot}{L_\odot}}$$

G : کهکشانی با درخشندگی ۲۰ میلیارد برابر خورشید و سرعت دورانی ۲۰۰ کیلومتر برثانیه در فاصله ۱۰ کیلوپارسک از مرکز کهکشان

جرم کهکشان را با توجه به سرعت چرخش کهکشان کحاسبه می‌کنیم:

$$v^2 = \frac{GM}{r} \rightarrow M = \frac{v^2 r}{G} \rightarrow \frac{M}{M_\odot} = \frac{v^2 r}{G\ M_\odot} \rightarrow M = \frac{v^2 r}{G\ M_\odot}\ M_\odot$$

$$M_G = \frac{(200 \times 10^3)^2 \times 10 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{16}}{6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}} \rightarrow \ M_G = 9.3 \times 10^{10}\ M_\odot$$

پس نسبت خواسته شده برابر است با:

$$(\frac{M}{L})_G = \frac{9.3 \times 10^{10}\ M_\odot}{20 \times 10^9 \times L_\odot} \rightarrow (\boldsymbol{\frac{M}{L}})_{\boldsymbol{G}} = \mathbf{4.6}\ \boldsymbol{\frac{M_\odot}{L_\odot}}$$

با مقایسه‌ی چهار نسبت بدست آمده داریم:

$$\left(\frac{M}{L}\right)_{WD} > \left(\frac{M}{L}\right)_{G} > \left(\frac{M}{L}\right)_{SS} > \left(\frac{M}{L}\right)_{GS}$$

پس گزینه صحیح برابر است با:

$$\boldsymbol{WD > G > SS > GS}$$

محاسبات سوال ۱۷:

$$\frac{1.44}{\left(\frac{6371 \cdot 10^{3}}{6.96 \cdot 10^{8}}\right)^{2} \cdot \left(\frac{20000}{5777}\right)^{4}} = 119.6341721$$

$$\frac{1}{10^{2}} = 0.01$$

$$\frac{\left(200 \cdot 10^{3}\right)^{2} \cdot 10 \cdot 10^{3} \cdot 3.09 \cdot 10^{16}}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}} = 9.31192695 \times 10^{10}$$

$$\frac{\boxed{9.31192695 \times 10^{10}}_{\text{ans}}}{20 \cdot 10^{9}} = 4.655963476$$

سوال ۱۸ – (گزینه ۲)

برای حل این سوال ابتدا زاویه ساعتی ستاره را در لحظه‌ای که پیام ارسال شده، از دید ناظر سنگاپور بدست می‌آوریم:

با نوشتن یک رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث *PZX* داریم:

$$cos(90-a) = cos(90-\varphi)\,cos(90-\delta) + sin(90-\varphi)\,sin(90-\delta)\,cos\,(H)$$

$$sin(a) = sin(\varphi)\,sin(\delta) + cos(\varphi)\,cos(\delta)\,cos(H)$$

$$cosH = \frac{sin(a) - sin(\varphi)\,sin(\delta)}{cos(\varphi)\,cos(\delta)} \rightarrow H = 20.96$$

در این لحظه زاویه ساعتی ستاره از دید ناظر در رصدخانه مراغه را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta H = \Delta l \rightarrow H_{\text{سنگاپور}} - H_{\text{مراغه}} = l_{\text{سنگاپور}} - l_{\text{مراغه}} \rightarrow H_{\text{مراغه}} = H_{\text{سنگاپور}} - l_{\text{سنگاپور}} + l_{\text{مراغه}}$$

$$H_{\text{مراغه}} = 20.96 - 104 + 46 \rightarrow H_{\text{مراغه}} = -37.04$$

حال باید ببینیم پس از چه مدت زمانی بعد از لحظه‌ی ارسال پیام ستاره را رصد می‌کند. برای راحتی و دوری از پیچیدگی تمامی زمان‌ها را به زمان میانگین گرینویچ (*GMT*) تبدیل می‌کنیم.

ساعت ارسال پیام:

$$GMT_1 = ZT_{\text{سنگاپور}} - 8^h \rightarrow GMT_1 = 00{:}30 - 8^h \rightarrow\ GMT_1 = -7{:}30 \xrightarrow{+24^h} GMT_1 = 16{:}30$$

لحظه‌ی مشاهده‌ی ستاره توسط ناظر مراغه:

(نکته: می‌دانیم که مراغه و تهران هر دو در ایران هستند و منطقه‌ی زمانی هر دو یکی است)

$$GMT_2 = ZT_{\text{مراغه}} - 3.5 \rightarrow GMT_2 = 5{:}00 - 3.5^h \rightarrow\ GMT_2 = 1.5 \xrightarrow{+24^h} GMT_2 = 01{:}30$$

پس می‌توانیم مدت زمان گذشته بین ارسال پیام تا رصد ستاره را محاسبه کنیم:

$$\Delta t = GMT_2 - GMT_1 \rightarrow \Delta t = 01{:}30 - \ 16{:}30 = -15 \xrightarrow{+24^h} \Delta t = 9^h$$

حال برای بدست آوردن مختصات ستاره باید زاویه ساعتی نهایی ستاره را محاسبه کنیم:

$$\Delta H = \omega.\Delta t \rightarrow\ H_2 - H_1 = \omega.\Delta t \rightarrow\ H_2 = H_1 + \omega.\Delta t \rightarrow H_2 = -37.04 + \frac{360}{86164} \times (9 \times 60 \times 60)$$

$$H_2 = 98.33$$

اکنون کافیست تا در مثلث *PZX* با داشتن عرض جغرافیایی مراغه، میل ستاره و زاویه ساعتی ستاره، ارتفاع آن را محاسبه کنیم.

برای این‌کار از رابطه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$cos(90-a) = cos(90-\varphi)\,cos(90-\delta) + sin(90-\varphi)\,sin(90-\delta)\,cos\,(H)$$
$$sin(a) = sin(\varphi)\,sin(\delta) + cos(\varphi)\,cos(\delta)\,cos(H)$$

$$sin(a) = sin(37)\,sin(48) + cos(37)\,cos(48)\,cos(98.33) \rightarrow a = 21.7 \rightarrow \boldsymbol{a \approx 22}$$

محاسبات سوال ۱۸:

$\frac{\sin(40)-\sin(1.4)\sin(48)}{\cos(1.4)\cdot\cos(48)}$	$= 0.9337750678$
$\cos^{-1}\left(\boxed{0.9337750678}\right)$	$= 20.96885875$
$0.5-8$	$= -7.5$
$24-7.5$	$= 16.5$
$1.5-16.5$	$= -15$
$\boxed{-15}+24$	$= 9$
$-37.04+\frac{360}{86164}\cdot 9\cdot 60\cdot 60$	$= 98.32975999$
$\sin(37)\sin(48)+\cos(37)\cos(48)\cos\left(\boxed{98.32975999}\right)$	$= 0.3698183484$
$\sin^{-1}\left(\boxed{0.3698183484}\right)$	$= 21.7044148$

سوال ۱۹ - (گزینه ۱)

با توجه به مقدار اختلاف منظر می‌توان فاصله‌ی ستاره را محاسبه کرد:

$$d = \frac{1}{\pi} \to d = \frac{1}{\pi} \to d = \frac{1}{0.1} \to d = 10\ pc$$

حال برای بدست آوردن درخشندگی ستاره در دو طیف آبی و زرد مقدار قدر ستاره در این دو طیف را با قدر ظاهری خورشید مقایسه می‌کنیم.
چون قرار است از درخشندگی خورشید استفاده کنیم پس قدر متناظر آن باید قدر بلومتریک خورشید باشد:

$$BC = m_{bol} - m_v \to\ m_{bol} = m_v + BC \to\ m_{bol_\odot} = -26.7 + (-0.14) = -26.84$$

از رابطه‌ی قدر داریم:

$$V - m_{bol_\odot} = -2.5\, log\left(\frac{b_v}{b_\odot}\right) \to\ V - m_{bol_\odot} = -2.5\, log\left(\frac{\frac{L_v}{4\pi d^2}}{\frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2}}\right) \to$$

$$V - m_{bol_\odot} = -2.5\, log\left(\frac{L_v}{L_\odot} \times \left(\frac{d_\odot}{d}\right)^2\right) \to \frac{V - m_{bol_\odot}}{-2.5} = log\left(\frac{L_v}{L_\odot}\right) + 2\, log\left(\frac{d_\odot}{d}\right) \to$$

$$log\left(\frac{L_v}{L_\odot}\right) = \frac{V - m_{bol_\odot}}{-2.5} - 2\, log\left(\frac{d_\odot}{d}\right) \to\ log\left(\frac{L_v}{L_\odot}\right) = \frac{1.2 - (-26.84)}{-2.5} - 2\, log\left(\frac{1}{10 \times 206265}\right)$$

$$log\left(\frac{L_v}{L_\odot}\right) = 1.41 \to\ \frac{L_v}{L_\odot} = 25.87\ (I)$$

به همین شکل برای باند آبی نیز می‌توان نوشت:

$$log\left(\frac{L_B}{L_\odot}\right) = \frac{B - m_{bol}}{-2.5} - 2\, log\left(\frac{d_\odot}{d}\right) \to\ log\left(\frac{L_B}{L_\odot}\right) = \frac{1.5 - (-26.84)}{-2.5} - 2\, log\left(\frac{1}{10 \times 206265}\right)$$

$$log\left(\frac{L_B}{L_\odot}\right) = 1.29 \to\ \frac{L_B}{L_\odot} = 19.62\ (II)$$

با توجه به اینکه بیشتر درخشندگی ستاره در محدوده‌ی آبی و زرد است پس درخشندگی کل ستاره را می‌توانیم با مجموع این درخشندگی‌ها برابر بگیریم:

$$L_{total} = L_v + L_B$$

و نسبت این را به درخشندگی خورشید محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{L_{total}}{L_\odot} = \frac{L_v + L_B}{L_\odot} = \frac{L_v}{L_\odot} + \frac{L_B}{L_\odot} \xrightarrow{(I),(II)} \frac{L_{total}}{L_\odot} = 25.87 + 19.62 = 45.49 \to \boldsymbol{\frac{L_{total}}{L_\odot}} \approx \mathbf{45}$$

محاسبات سوال ۱۹:

$$-26.7-0.14 = -26.84$$

$$\frac{1.2-(-26.84)}{-2.5}-2\log\left(\frac{1}{10\cdot 206\,265}\right) = 1.412851082$$

$$10^{1.412851082} = 25.8732558$$

$$\frac{1.5-(-26.84)}{-2.5}-2\log\left(\frac{1}{10\cdot 206\,265}\right) = 1.292851082$$

$$10^{1.292851082} = 19.62687164$$

$$25.87+19.62 = 45.49$$

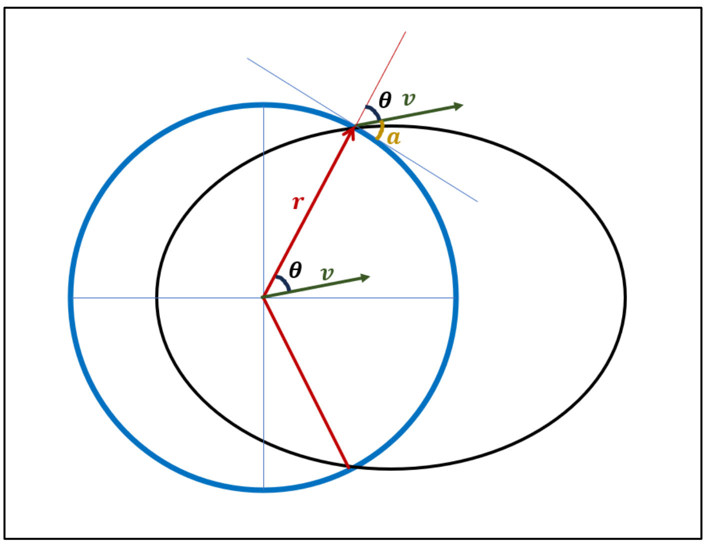
سوال ۲۰ – (گزینه ۲)

چون سرعت پرتابه از سرعت فرار از سطح زمین کمتر است پس پرتابه یک مدار بیضوی خواهد داشت، برای پیدا کردن نقطه‌ی برخورد ابتدا پارامترهای مداری پرتابه را محاسبه می‌کنیم.

ابتدا با توجه به سرعت و فاصله‌ی پرتابه تا مرکز زمین که در اختیار داریم و با استفاده از قانون پایستگی انرژی نیم‌قطر اطول مدار را مشخص می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a} \rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{1}{GM}\left(\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}v^2\right)$$

$$a = \frac{2}{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{GM}\right)} \rightarrow a = \frac{2}{\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{2}\frac{10000^2}{GM_\oplus}\right)} \rightarrow a = 6.37 \times 10^7\ m$$



حال با استفاده از پایستگی تکانه‌زاویه‌ای واحد جرم و جایگذاری مقادیر در لحظه‌ی پرتاب خروج از مرکز مدار را محاسبه می‌کنیم.

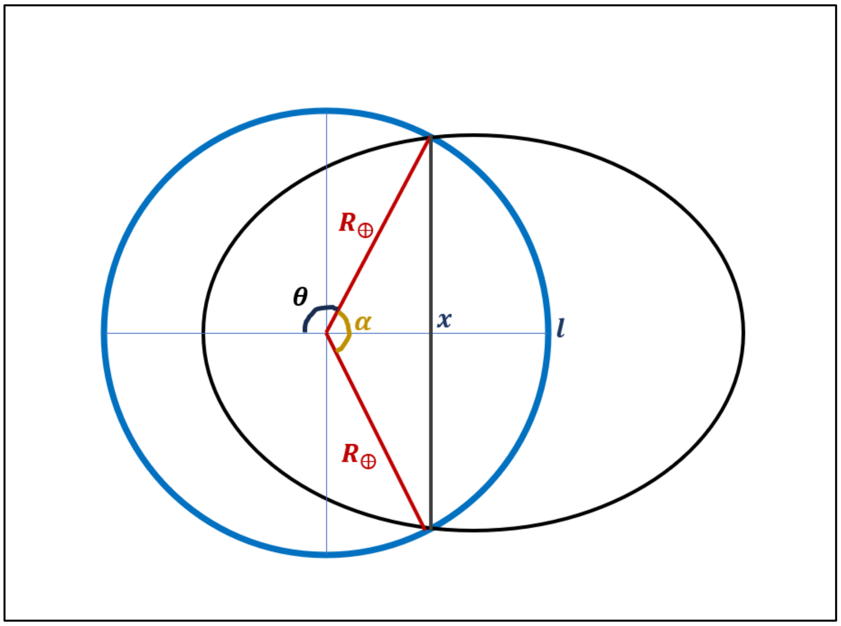
میزان زاویه‌ی θ یعنی زاویه‌ی بین بردار سرعت و بردار شعاع طبق شکل و زاویه‌ی ارتفاع پرتاب که در مسئله داده شده، برابر است با:

$$\theta = 180 - (90 + a) \rightarrow \theta = 90 - a \rightarrow \theta = 45°$$

پایستگی تکانه زاویه‌ای واحد جرم $h = \sqrt{GMa(1-e^2)} = r.v.sin(\theta)$

$$(1 - e^2) = \frac{(r.v.sin(\theta))^2}{GMa} \rightarrow e^2 = 1 - \frac{(r.v.sin(\theta))^2}{GMa} \rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{(r.v.sin(\theta))^2}{GMa}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{(R_\oplus.10000.sin(45))^2}{GM_\oplus a}} \rightarrow e = 0.959$$



حال می‌توانیم با نوشتن معادله‌ی قطبی بیضی با توجه به شکل، زاویه‌ی میان نقطه‌ی پرتاب و برخورد را محاسبه کنیم:

این زاویه را α می‌نامیم و از روی شکل و با توجه به تقارن در بیضی می‌توان نوشت:

$$\alpha = 360 - 2\theta$$

معادله‌ی قطبی بیضی را نوشته و با جایگذاری ثوابت به دست آمده $(a\ ,e)$ و موقعیت کنونی یعنی در فاصله‌ی شعاع زمین تا مرکز می‌توانیم زاویه‌ی θ را محاسبه کنیم:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,cos(\theta)} \rightarrow 1 + e\,cos(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{r} \rightarrow\ e\,cos(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{r} - 1$$

$$\rightarrow cos(\theta) = \frac{1}{e} \times (\frac{a(1-e^2)}{r} - 1) \rightarrow cos(\theta) = \frac{1}{0.959} \times (\frac{6.37 \times 10^7 \times (1 - 0.959^2)}{R_\oplus} - 1)$$

$$\theta = 102.04$$

بنابراین:

$$\alpha = 360 - 2\theta \rightarrow \alpha = 360 - 2 \times (102.04) \rightarrow \alpha = 155.92$$

حال با توجه به شکل کافیست فاصله‌ی نقطه‌ی پرتاب و برخورد روی سطح زمین یعنی کمان مقابل به این زاویه و سپس کوتاهترین فاصله‌ی بین این دو نقطه که طبق اصول اولیه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی خط واصل بین دو نقطه است را محاسبه می‌کنیم.

محاسبه طول کمان:

$$l = r\,\alpha^{rad} \rightarrow l = R_\oplus \times 155.92 \times \frac{\pi}{180} \rightarrow l = 17337\ km$$

محاسبه خط واصل با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث‌های مسطحه:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos(\alpha)$$

$$x^2 = {R_\oplus}^2 + {R_\oplus}^2 - 2.R_\oplus.R_\oplus.cos\ (\alpha)\ \rightarrow\ x^2 = 2{R_\oplus}^2 - 2{R_\oplus}^2.cos\ (\alpha)$$

$$x^2 = 2{R_\oplus}^2\ (1 - cos(\alpha)) \rightarrow x = R_\oplus\sqrt{2(1 - cos(\alpha))}$$

$$x = 12461\ km$$

پاسخ نهایی مسئله برابر اختلاف دو عدد l و x است:

$$l - x = 17337 - 12461 = 4879 \approx \mathbf{4500\ km}$$

محاسبات سوال ۲۰:

$6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}$	$= 3.98199 \times 10^{14}$
$\dfrac{1}{6371 \cdot 10^3} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{10000^2}{\boxed{3.98199\times10^{14}}}$	$= 3.13958726 \times 10^{-8}$
$\dfrac{2}{\boxed{3.13958726\times10^{-8}}}$	$= 63702641.06$
$\sqrt{1 - \dfrac{(6371 \cdot 10^3 \cdot 10000 \cdot \sin(45))^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \cdot \boxed{63702641.06}}}$	$= 0.9591626917$
$\dfrac{1}{\boxed{0.9591626917}} \cdot \left(\dfrac{6.37 \cdot 10^7 \cdot \left(1 - \boxed{0.9591626917}^2\right)}{6371 \cdot 10^3} - 1\right)$	$= -0.2085738657$
$\cos^{-1}\left(\boxed{-0.2085738657}\right)$	$= 102.0387902$
$360 - 2 \cdot \boxed{102.0387902}$	$= 155.9224196$
$6371 \cdot 155.92 \cdot \dfrac{\pi}{180}$	$= 17337.51296$
$6371 \cdot \sqrt{2(1 - \cos(155.92))}$	$= 12461.70419$
$17337 - 12461$	$= 4876$

سوال ۲۱ – (گزینه ۴)

برای حل این سوال ابتدا در این لحظه مقدار *LST* را باید محاسبه کنیم، با توجه به اینکه مقدار بعد ستاره داده شده است، باید ابتدا زاویه ساعتی ستاره را محاسبه کنیم. در مثلث *PZX* و با استفاده از رابطه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$\frac{sin(A)}{sin(90-\delta)}=\frac{sin(H)}{sin(90-a)}\rightarrow\frac{sin(A)}{cos(\delta)}=\frac{sin(H)}{cos(a)}\rightarrow sin(H)=\frac{sin(A)\,cos(a)}{cos(\delta)}$$

$$sin(H)=\frac{sin(135)\,cos(30)}{cos(46)}\rightarrow H=61.83°$$

مقدار *LST* را حساب می‌کنیم:

$$\alpha=5:17\rightarrow\alpha=5.283^h\rightarrow\ \ \alpha=79.25°$$

$$LST=H+\alpha\rightarrow LST=61.83+79.25=141.08$$

از طرفی *LST* برابر است با:

$$LST=HAMS+RAMS$$

مقدار *HAMS* با استفاده از زمان محلی (*LMT*) بدست می‌آید:

$$LMT=HAMS+12:00\rightarrow HAMS=LMT-12:00\rightarrow HAMS=1:00-12:00$$

$$HAMS=\ -11:00\xrightarrow{+24^h}HAMS=13^h\xrightarrow{\times 15}\ 195°$$

با داشتن *LST* و *HAMS* می‌توان *RAMS* (بعد خورشید میانگین) را حساب کرد:

$$LST=HAMS+RAMS\rightarrow RAMS=LST-HAMS$$

$$RAMS=141.08-195=-53.92\ \xrightarrow{+360°}RAMS=306.08$$

با توجه به رابطه‌ی بین بعد خورشید میانگین و روزهای گذشته از سال می‌توان تاریخ را محاسبه کرد:

$$RAMS=\frac{t}{365.25}\times 360\rightarrow t=RAMS\times\frac{365.25}{360}\rightarrow t=306.08\times\frac{365.25}{360}\rightarrow t=310.54\,days$$

از ابتدای سال حدود ۳۱۱ روز گذشته است، کافیست با کم کردن ماه‌ها تاریخ را بدست آوریم:

$$311-(6\times 31)-(3\times 30)-30=\mathbf{5}$$

یعنی روز **۵ بهمن**.

محاسبات سوال ۲۱:

$\frac{\sin(135)\cdot\cos(30)}{\cos(46)}$	$=0.8815447445$
$\sin^{-1}\left(\boxed{0.8815447445}\right)$ ans	$=61.82927014$
$\left(5+\frac{17}{60}\right)\cdot 15$	$=79.25$
$61.83+79.25$	$=141.08$
$(24-11)\cdot 15$	$=195$
$(141.08-195)$	$=-53.92$
$\boxed{-53.92}+360$ ans	$=306.08$
$\boxed{306.08}\cdot\frac{365.25}{360}$ ans	$=310.5436667$
$311-(6\cdot 31)-(3\cdot 30)-30$	$=5$

سوال ۲۲ – (گزینه ۳)

برای محاسبه‌ی توان ساطع شده به محیط بیرون باید توان کل را در درصدی از سطح لامپ که کدر نیست ضرب کنیم.

ابتدا مساحت عرقچین کدر را محاسبه می‌کنیم. برای آن باید زاویه‌ی عرق‌چین را با توجه به شکل محاسبه کنیم:

$$sin(\theta) = \frac{r}{R} \rightarrow sin(\theta) = \frac{3}{5} \rightarrow \theta = 36.87$$

مساحت عرق‌چین که در انتهای جدول ثوابت نیز نوشته شده برابر است با:

$$S_{\text{کدر}} = 2\pi R^2(1 - cos(\theta))$$

مساحت قسمت غیر کدر تفاضل مساحت کل کره از عرق‌چین کدر است:

$$S_{\text{غیرکدر}} = S_{\text{کره}} - S_{\text{کدر}} \rightarrow S_{\text{غیرکدر}} = 4\pi R^2 - 2\pi R^2(1 - cos(\theta))$$

پس درصد قسمت شفاف برابر است با:

$$\frac{S_{\text{غیرکدر}}}{S_{\text{کره}}} = \frac{4\pi R^2 - 2\pi R^2(1 - cos(\theta))}{4\pi R^2} = 1 - \frac{1}{2}(1 - cos(\theta)) \rightarrow \frac{S_{\text{غیرکدر}}}{S_{\text{کره}}} = 1 - \frac{1}{2}(1 - cos(36.87))$$

$$\frac{S_{\text{غیرکدر}}}{S_{\text{کره}}} = 0.9$$

پس توان تابشی ساطع شده به محیط برابر است با:

$$L' = L \times \frac{S_{\text{غیرکدر}}}{S_{\text{کره}}} \rightarrow L' = 100 \times 0.9 = \mathbf{90\ w}$$

محاسبات سوال ۲۲:

$\frac{3}{5}$	$= 0.6$
$\sin^{-1}(0.6)$	$= 36.86989765$
$1 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos(36.86989765)\right)$	$= 0.9$
$100 \cdot 0.9$	$= 90$

سوال ۲۳ - (گزینه ۴)

نسبت‌های کانونی تلسکوپ ها با هم برابر است:

$$\frac{f_1}{D_1} = \frac{f_2}{D_2} = \frac{f_3}{D_3}$$

از این فرض می‌توان نتیجه گرفت که:

تلسکوپی که فاصله کانونی (f) بیشتر(کمتر) دارد قطردهانه‌ی (D) بزرگتر(کوچکتر)ی دارد.

تلسکوپی که قطردهانه‌ی (D) بزرگتری(کوچکتر) دارد، فاصله کانونی (f) بیشتر(کمتر)ی دارد

ابتدا فرض‌های گفته شده در سوال را بررسی می‌کنیم:

۱. با تلسکوپ ۱ نمی‌توان دو چراغ را از همدیگر تشخیص داد.

- با توجه به رابطه‌ی توان تفکیک این تلسکوپ توان تفکیک پایین در نتیجه قطر دهانه‌ی به نسبت کوچکی دارد.

$$\theta^{rad} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

۲. با تلسکوپ ۲ نمی‌توان دو چراغ را کاملاً با هم در دایره میدان دید پشت تلسکوپ دید.

- چون یک چشمی برای تلسکوپ‌ها استفاده می‌شود پس تلسکوپی که میدان دید کمتری داشته باشد یعنی بزرگنمایی بیشتری دارد و تلسکوپی که بزرگنمایی بیشتری دارد پس فاصله‌ی کانونی بیشتری دارد. این تحلیل با توجه به روابط مربوط به تلسکوپ‌ها به راحتی قابل استنتاج است:

$$\text{بزرگنمایی} : m = \frac{f_o}{f_e}$$

$$\text{میدان دید} : FOV_{Telescope} = \frac{FOV_{eyepiece}}{m}$$

پس تلسکوپ ۲ فاصله‌ی کانونی به نسبت زیادی دارد.

۳. با تلسکوپ ۳ چراغ‌ها پرنورتر از تلسکوپ ۲ دیده می‌شوند.

- با توجه به مفهوم *LGP* (توان گردآوری نور) با تلسکوپی که قطر دهانه‌ی بیشتری داشته باشد اجرام را پرنورتر می‌توان دید. پس از این عبارت و با توجه به فرض ثابت بودن نسبت کانونی‌ها می‌توان نتیجه گرفت که:

$$D_3 > D_2 \rightarrow f_3 > f_2$$

۴. با تلسکوپ ۳ چراغ‌ها کوچکتر از تلسکوپ ۱ دیده می‌شوند.

- این عبارت یعنی بزرگنمایی تلسکوپ ۳ کمتر از تلسکوپ ۱ است پس فاصله کانونی تلسکوپ ۳ کمتر از تلسکوپ ۱ است:

$$f_3 < f_1 \rightarrow D_3 < D_1$$

از ترکیب عبارات ۳ و ۴ می‌توان این نتیجه را گرفت:

$$f_1 > f_3 > f_2 \rightarrow D_1 > D_3 > D_2$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه ۱: با تلسکوپ ۲ چراغ‌ها بزرگتر از تلسکوپ ۱ دیده می‌شوند.

این گزینه یعنی بزرگنمایی تلسکوپ ۲ بزرگتر از تلسکوپ ۱ است و یعنی: $f_2 > f_1$ که این با نتیجه‌ی نهایی که گرفتیم در تناقض است. پس گزینه ۱ صحیح نیست.

گزینه ۲: با تلسکوپ ۳ می‌توان دو چراغ را کاملاً با هم در یک دایره میدان دید پشت تلسکوپ دید.

با توجه به فرض دوم، وقتی نمی توان با تلسکوپ ۲، دو چراغ را در یک میدان دید قرار داد پس با تلسکوپی که بزرگنمایی بیشتری دارد نیز نمی‌توان دو چراغ را کامل در میدان دید قرار داد. با توجه به اینکه $f_3 > f_2$ مشخص است که تلسکوپ ۳ بزرگنمایی بیشتری از تلسکوپ ۲ دارد پس نمی توان دو چراغ را در یک میدان دید با این تلسکوپ دید. پس گزینه ۲ صحیح نیست.

گزینه ۳: با تلسکوپ ۳ چراغ‌ها پرنورتر از تلسکوپ ۱ دیده می‌شوند.

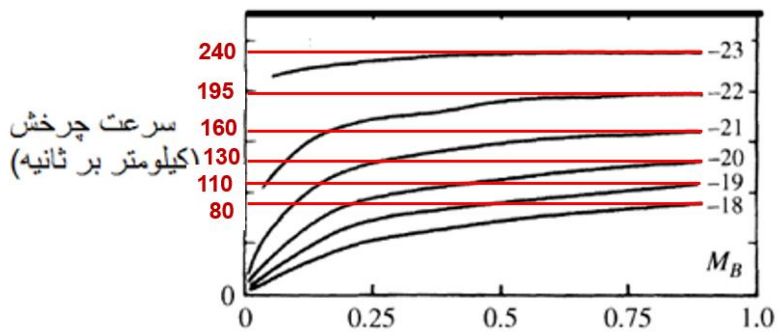
این گزینه به این معناست که: $D_3 > D_1$ که با نتیجه‌ای که در مورد اندازه‌دهانه‌ها گرفتیم در تناقض است. پس گزینه ۳ صحیح نیست.

گزینه ۴: با تلسکوپ ۳ نمی‌توان دو چراغ را از همدیگر تشخیص داد.

با توجه به فرض اول، تلسکوپی که دهانه‌ی کوچکتری از تلسکوپ ۱ داشته باشد نمی‌تواند این دو چراغ را تفکیک کند و ما نمی‌توانیم دو چراغ را از هم تشخیص دهیم. با توجه به ابعاد دهانه که نتیجه گرفتیم ($D_1 > D_3$) دهانه تلسکوپ ۳ از دهانه تلسکوپ ۱ کوچکتر است پس نمی‌تواند تفکیک کند. پس **گزینه ۴ صحیح است.**

سوال ۲۴ – (گزینه ۱)

بیشترین سرعت چرخش دوران هر کهکشان(V_{Max}) را که قدر مطلق آبی (M_B) آن هم در نموار نوشته شده است را می‌خوانیم:



V_{Max}	$\log(V_{Max})$	M_B
240	2.38	-23
195	2.29	-22
160	2.20	-21
130	2.11	-20
110	2.04	-19
80	1.90	-18
	X	**Y**

حال باید با توجه به داده‌های به دست آمده یک خط به داده ها برازش کنیم (رگرسیون) تا مقادیر A و B بدست آیند:

$$M_B = A\ \log(V_{Max}) + B$$

که اگر داده‌ها را به X و Y تغییر نام دهیم می‌توان نوشت:

$$Y = A\,X + B$$

برای بدست آوردن رگرسیون یا شیب و عرض از مبدا می‌توان هم از قسمت محاسبات آماری ماشین حساب استفاده کرد و هم می‌توان از روابط زیر شیب و عرض از مبدا را حساب کرد:

$$A = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad , \quad B = \bar{y} - A\bar{x}$$

در نهایت مقادیر A و B به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$A = -10.7\ , \qquad B = 2.7$$

و با توجه به گزینه‌ها می‌توانیم نزدیکترین رابطه را به صورت زیر بنویسیم:

$$\boldsymbol{M_B = -10.2\ \log(V_{Max}) + 2}$$

سوال ۲۵ - (گزینه ۲)

با توجه به قضیه‌ی ویریال داریم:

$$2K + U = 0$$

اگر خوشه n ستاره داشته باشد برای محاسبه‌ی پتانسیل خوشه تعداد جفت (دو به دوی) ستارگان را برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ در نظر می‌گیریم.

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{2\,(n-2)(n-3)\dots 1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

با توجه به اینکه بیشترین فاصله‌ی بین ۲ ستاره در خوشه $2R$ و کمترین فاصله بین ۲ ستاره $\underline{0}$ است پس فاصله‌ی هر دو ستاره را به طور میانگین R در نظر می‌گیریم. در نهایت پتانسیل کل خوشه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U = -\frac{G.m.m}{R} \times \frac{n(n-1)}{2}$$

انرژی جنبشی کل خوشه نیز برابر است با:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \times n$$

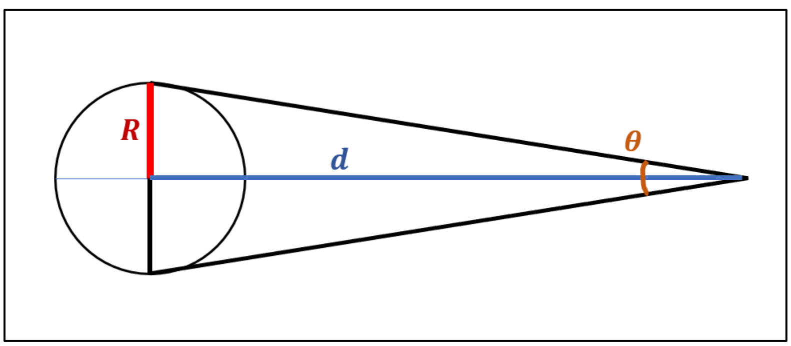
پس طبق قضیه‌ی ویریال داریم:

$$2K + U = 0 \rightarrow 2 \times \frac{1}{2}mv^2 \times n - \frac{G.m.m}{R} \times \frac{n(n-1)}{2} = 0$$

$$nmv^2 - \frac{n(n-1)\,G\,m^2}{2R} = 0 \rightarrow \; nmv^2 = \frac{n(n-1)\,G\,m^2}{2R}$$

$$v^2 = \frac{(n-1)\,G\,m}{2R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{(n-1)\,G\,m}{2R}}$$

برای محاسبه‌ی شعاع خوشه چون θ بسیار کوچک است، با توجه به داشتن فاصله و قطر زاویه‌ای خوشه می‌توان نوشت:



$$R = d \times \frac{\theta^{rad}}{2}$$

$$R = d \times \frac{\theta^{arcses}}{2} \times \frac{1}{206265} \rightarrow R = 120 \times \frac{0.1}{2} \times \frac{1}{206265} = 2.91 \times 10^{-5}\,pc$$

تبدیل پارسک به متر $R_{(m)} = 2.91 \times 10^{-5} \times 3.09 \times 10^{16} \to R = 8.99 \times 10^{11} m$

در نهایت می‌توان سرعت را محاسبه کرد:

$$v = \sqrt{\frac{(10^6 - 1)\ G\ M_{\odot}}{2 \times 8.99 \times 10^{11}}} \to v = 8.6 \times 10^6\ \frac{m}{s} \approx 10^7\ \frac{m}{s} = \mathbf{10000}\ \frac{\boldsymbol{km}}{\boldsymbol{s}}$$

محاسبات سوال ۲۵:

$$120 \cdot \frac{0.1}{2} \cdot \frac{1}{206265} = 2.90887935 \times 10^{-5}$$

$$\boxed{2.90887935 \times 10^{-5}}_{\text{ans}} \cdot 3.09 \cdot 10^{16} = 8.9884372 \times 10^{11}$$

$$\sqrt{\frac{\left(10^6 - 1\right) \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{2 \cdot \boxed{8.9884372 \times 10^{11}}_{\text{ans}}}} = 8592749.394$$

سوال ۲۶ – (گزینه ۲)

ابتدا چگالی کهکشان راه شیری را بدست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow \rho = \frac{n.M_{\odot}}{\pi R^2 h}$$

n: تعداد ستارگان، R: شعاع کهکشان و h: ارتفاع دیسک کهکشان است.

$$\rho = \frac{10^{11} \times M_{\odot}}{\pi \times (25 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{16})^2 \times (300 \times 3.09 \times 10^{16})}$$

$$\rho = 1.14 \times 10^{-20} \, \frac{kg}{m^3}$$

طبق تعریف سوال تباین چگالی برابر است با:

$$\Delta = \frac{\rho - \rho_{cr}}{\rho_{cr}}$$

حال می‌توان مقدار عددی آن را محاسبه کنیم:

$$\Delta = \frac{1.14 \times 10^{-20} - 10^{-27}}{10^{-27}} \rightarrow \; \Delta = 1.1 \times 10^7 \rightarrow \boldsymbol{\Delta \approx 10^7}$$

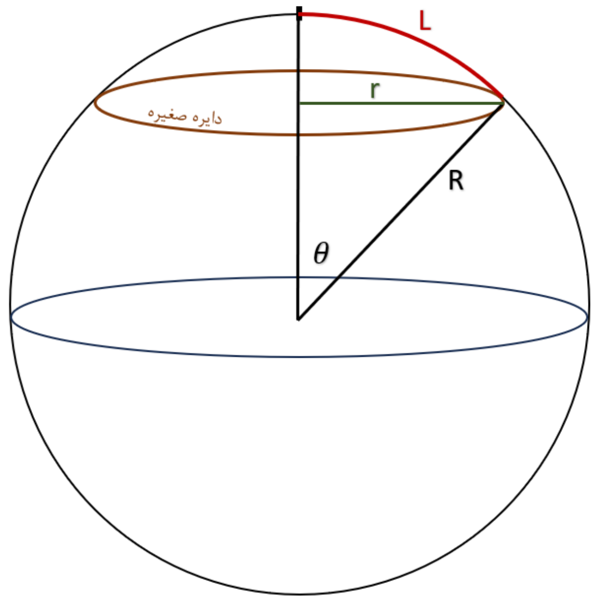
محاسبات سوال ۲۶:

$$\frac{10^{11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{\pi \cdot \left(25 \cdot 10^3 \cdot 3.09 \cdot 10^{16}\right)^2 \cdot \left(300 \cdot 3.09 \cdot 10^{16}\right)} = 1.14505538 \times 10^{-20}$$

$$\frac{\underbrace{1.14505538 \times 10^{-20}}_{ans} - 10^{-27}}{10^{-27}} = 11\,450\,552.85$$

سوال ۲۷ - (گزینه ۲)

محیط طناب وقتی دایره روی زمین کروی رسم می‌شود برابر محیط یک دایره صغیره است. به این صورت که یک سر طناب روی قطب دایره صغیره قرار می‌گیرد و با سر دیگر آن دایره صغیره را روی کره رسم می‌کنیم.



شعاع دایره‌ی صغیره که زاویه‌ی عرق‌چین متناظر آن θ باشد از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$sin(\theta) = \frac{r}{R} \rightarrow r = R\ sin\ (\theta)$$

چون زاویه‌ی θ زاویه‌ی مرکزی کمان به طول L است پس می‌توانیم بنویسیم:

$$L = R\ \theta \rightarrow \theta = \frac{L}{R}$$

با ترکیب دو رابطه‌ی قبل شعاع دایره صغیره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r = R\ sin\ (\frac{L}{R})$$

بنابراین محیط دایره صغیره برابر است با:

$$2\pi r = 2\pi R\ sin\ (\frac{L}{R})$$

اگر زمین تخت باشد محیط دایره به شعاع L برابر است با:

$$2\pi L$$

حال طبق خواسته‌ی سوال اختلاف دو محیط در دو حالت قبل باید ۱ کیلومتر باشد، پس مقدار مرزی برای L را محاسبه می‌کنیم:

$$2\pi L - 2\pi R \sin\left(\frac{L}{R}\right) = 1$$

برای بدست آوردن مقدار L از معادله‌ی بالا می‌توانیم از بسط سینوس که بعد از جدول ثوابت آمده، استفاده کنیم:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3}$$

بنابراین:

$$2\pi L - 2\pi R\left(\frac{L}{R} - \frac{\frac{L}{R}^3}{3}\right) = 1 \rightarrow L - R\left(\frac{L}{R} - \frac{\left(\frac{L}{R}\right)^3}{3}\right) = \frac{1}{2\pi}$$

$$L - R\frac{L}{R} + R\frac{L^3}{3R^3} = \frac{1}{2\pi} \rightarrow \ L - L + \frac{L^3}{3R^2} = \frac{1}{2\pi} \rightarrow \ 1 + \frac{L^3}{3R^2} = \frac{1}{2\pi}$$

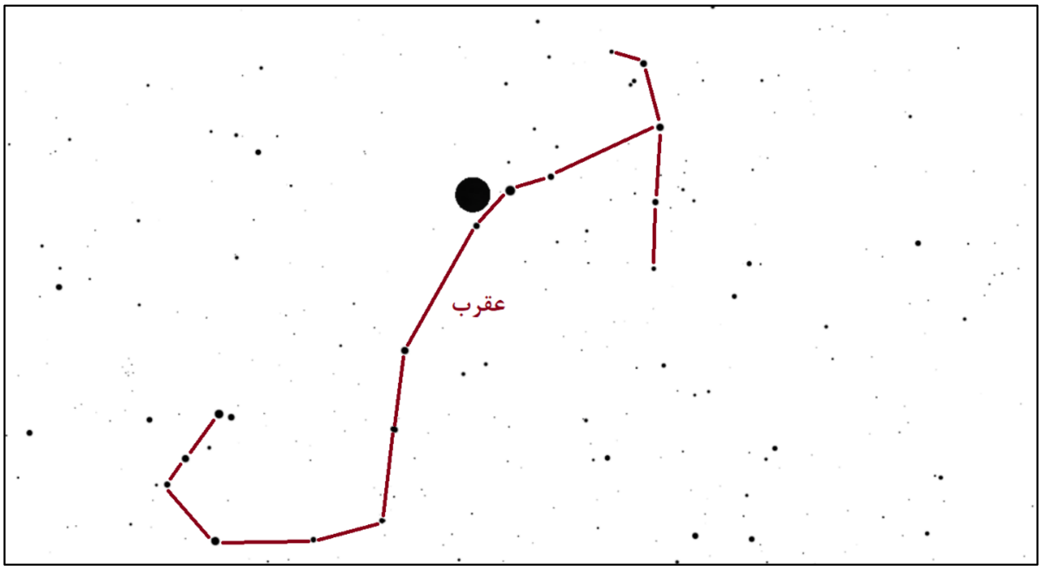
$$\frac{L^3}{3R^2} = \frac{1}{2\pi} - 1 \rightarrow L = \sqrt[3]{\frac{3R^2}{2\pi}} \rightarrow L = \sqrt[3]{\frac{3{R_\oplus}^2}{2\pi}} \rightarrow L = 268.6\ Km \ \approx \mathbf{300\ km}$$

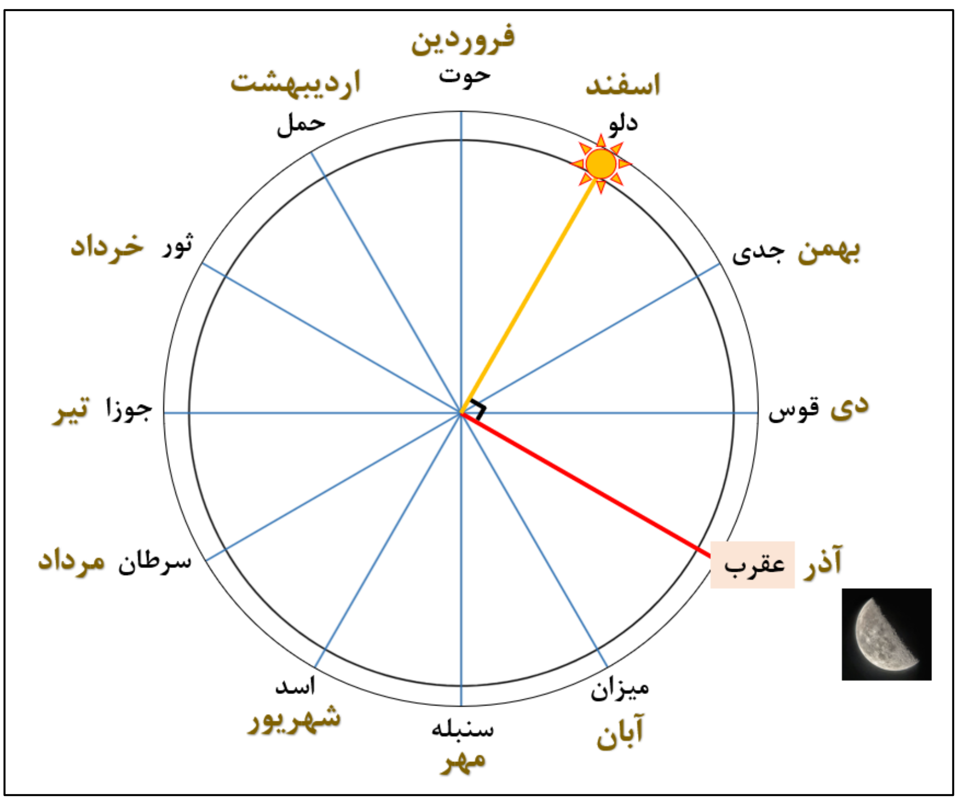
محاسبات سوال ۲۷:

$$\sqrt[3]{\frac{3\cdot 6371^2}{2\cdot \pi}} = 268.607952$$

سوال ۲۸ – (گزینه ۴)

در شکل سمت راست مشخص است که ماه در صورت فلکی عقرب قرار دارد. در شکل دوم مشخص است که نیمه‌ی سمت چپ ماه از دید ما روشن است و عوارض سطحی ماه مخصوصا وجود دهانه‌های برخوردی کپرنیک و کپلر اثباتی دیگر بر این ادعا است. پس مشخص می‌شود ماه در تربیع دوم قرار دارد. پس خورشید روی دایره‌البروج و در آن صورت فلکی قرار دارد که طول دایره‌البروجی آن ۹۰ درجه از ماه بیشتر است. ۹۰ درجه حدودا معادل ۳ صورت فلکی روی دایره البروج است و مطابق شکل زیر خورشید در صورت فلکی دلو قرار دارد. با توجه به گزینه ها تاریخ رصد در **اسفند ماه** می‌باشد.



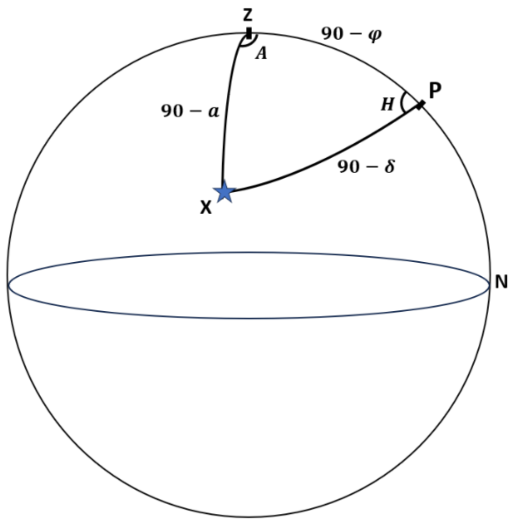


سوال ۲۹ – (گزینه ۱)

وقتی در یک مثلث کروی یک ضلع و زاویه‌ی مقابل به آن مجهول باشند برای حل آن دو روش وجود دارد.

۱. نوشتن رابطه‌ی کسینوس‌ها، تبدیل سینوس مجهول به کسینوس مجهول با استفاده از اتحاد مثلثاتی، ایجاد یک معادله درجه ۲ و حل آن.

۲. زاویه دیگر مجهول را با استفاده از رابطه‌ی سینوس‌ها بدست می‌آوریم و با نوشتن ۲ رابطه‌ی کسینوس‌ها برای دو ضلع و حل دو معادله ۲ مجهول ضلع مورد نظر را محاسبه می‌کنیم



در اینجا از روش دوم استفاده می‌کنیم.

رابطه‌ی سینوس‌ها در مثلث *PZX* را می‌نویسیم:

$$\frac{sin(A)}{sin(90-\delta)}=\frac{sin(H)}{sin(90-a)}\rightarrow\frac{sin(A)}{cos(\delta)}=\frac{sin(H)}{cos(a)}$$

$$\rightarrow sin(H)=\frac{sin(A)\,cos(a)}{cos(\delta)}$$

$$sin(H)=\frac{sin(45)\,cos(60)}{cos(46)}\rightarrow H=59.4°$$

سپس ۲ رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث *PZX* را برای دو ضلع دیگر می‌نویسیم:

$$cos(90-a)=cos(90-\varphi)\,cos(90-\delta)+sin(90-\varphi)\,sin(90-\delta)\,cos\,(H)$$

$$sin(a)=sin(\varphi)\,sin(\delta)+cos(\varphi)\,cos(\delta)\,cos(H)\quad(I)$$

$$cos(90-\delta)=cos(90-\varphi)\,cos(90-a)+sin(90-\varphi)\,sin(90-a)\,cos\,(A)$$

$$sin(\delta)=sin(\varphi)\,sin(a)+cos(\varphi)\,cos(a)\,cos(A)\quad(II)$$

از تغییر متغییر زیر استفاده می‌کنیم:

$$X=sin(\varphi)\quad,\quad Y=cos(\varphi)$$

پس روابط فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$sin(\delta)\,X+cos(\delta)\,cos(H)\,Y\;=sin(a)$$

$$sin(a)\,X+cos(a)\,cos(A)\,Y\;=\;sin(\delta)$$

با حل دو معادله دو مجهول فوق مقادیر *X* و *Y* به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$X=0.47035\,,Y=0.88248$$

در نتیجه:

$$cos(\varphi)=0.88248\rightarrow\;\boldsymbol{\varphi=28°}$$

$$sin(\varphi)=\;\;0.47035\rightarrow\;\boldsymbol{\varphi=28°}$$

محاسبات سوال ۲۹:

Equation 1) a= 0.7193398 b= 0.5979550 c= 0.8660254

Equation 2) a= 0.8660254 b= 0.3535533 c= 0.7193398

E N T E R

X= 0.4703514315765819 **Y=** 0.8824791958903148

R E S E T

$$\frac{\sin(45)}{\cos(46)} \cdot \cos(60) = 0.5089600955$$

$$\sin^{-1}(0.5089600955) = 30.59458703$$

$$\sin^{-1}(0.4703514315765819) = 28.05711114$$

$$\cos^{-1}(0.8824791958903148) = 28.05711111$$

سوال ۳۰ – (گزینه ۱)

در این سوال با توجه به نمودارهای گزینه‌ها باید تابع a بر حسب t را محاسبه کنیم. طبق داده‌ی سوال یک معادله‌ی دیفرانسیل داریم:

$$\frac{\frac{da}{dt}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}$$

از طرفی طبق سوال داریم:

$$\rho = \rho_0\, a^{-2}$$

با جایگذاری ρ معادله‌ی اول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\frac{da}{dt}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0\, a^{-2}}{3}} \rightarrow \frac{\frac{da}{dt}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}$$

که مقدار رادیکال ثابت (k) است و مثبت است ($k > 0$) پس به طور خلاصه معادله دیفرانسیل فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

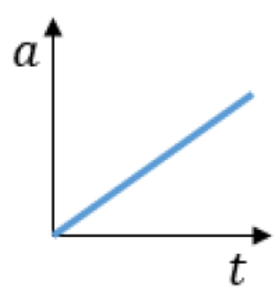
$$\frac{\frac{da}{dt}}{a} = \frac{k}{a} \rightarrow \frac{da}{dt} = k$$

بنابراین تابعی داریم که آهنگ تغییرات آن $\frac{da}{dt}$ ثابت و مثبت است که بین گزینه‌ها تنها تابع خطی (شیب ثابت) و با شیب مثبت در گزینه ۱ وجود دارد.

راه دوم: (حل معادله دیفرانسیل):

$$\frac{da}{dt} = k \rightarrow da = k\, dt \rightarrow \int da = \int k\, dt \rightarrow \boldsymbol{a = kt + c}$$

چون k یک مقدار مثبت است بنابراین شکل تابع فوق یک خط با شیب مثبت خواهد بود.



سوال ۱ مسئله‌های کوتاه – (پاسخ نهایی = 31)

رابطه‌ی طول پویش آزاد به شکل زیر است:

$$l = \frac{kT}{\frac{\pi D^2}{4} P}$$

اطلاعات مربوط به دما و فشار در نزدیکی سطح سیاره در جدول ثوابت آمده است.

در نظر داشته باشید جو زمین بیشتر از نیتروژن و جو زهره بیشتر از کربن‌دی‌اکسید تشکیل شده است.

$$\frac{l_e}{l_v} = \frac{\frac{4kT_e}{\pi {D_{N_2}}^2 P_e}}{\frac{4kT_v}{\pi {D_{co_2}}^2 P_v}} \rightarrow \frac{l_e}{l_v} = \frac{T_e}{T_v} \cdot \frac{P_v}{P_e} \cdot \left(\frac{D_{co_2}}{D_{N_2}}\right)^2 \rightarrow \frac{l_e}{l_v} = \frac{(30+273)}{(480+273)} \times \frac{92}{1} \times \left(\frac{3.3 \times 10^{-10}}{3.6 \times 10^{-10}}\right)^2$$

$$\frac{l_e}{l_v} = 31.1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{l_e}{l_v} \approx 31}$$

محاسبات سوال ۱ مسئله‌های کوتاه:

$$\frac{(30+273)}{(480+273)} \cdot \frac{92}{1} \cdot \left(\frac{3.3}{3.6}\right)^2 = 31.10701638$$

سوال۲ مسئله‌های کوتاه – (پاسخ نهایی = 13)

چون انتقال به سرخ نسبتا زیادی دارد، ابتدا سرعت شعاعی کوازار را با استفاده از اثر داپلر نسبیتی محاسبه می‌کنیم:

$$1+z=\sqrt{\frac{1+\frac{v_r}{c}}{1-\frac{v_r}{c}}} \rightarrow (1+z)^2=\frac{1+\frac{v_r}{c}}{1-\frac{v_r}{c}} \rightarrow \ (1+z)^2\left(1-\frac{v_r}{c}\right)=\left(1+\frac{v_r}{c}\right)$$

$$\frac{v_r}{c}=\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1} \rightarrow \ v_r=\frac{(1+0.05)^2-1}{(1+0.05)^2+1}\times 3\times 10^8 \rightarrow v_r=1.46\times 10^7\ \frac{m}{s}$$

$$v_r=1.46\times 10^4\ \frac{km}{s}$$

با استفاده از رابطه‌ی هابل فاصله‌ی کوازار را حساب می‌کنیم:

$$v_r=H\ d \rightarrow d=\frac{v_r}{H} \rightarrow d=\frac{1.46\times 10^4\ \frac{km}{s}}{72\ \frac{km}{s.Mpc}} \rightarrow d=203.1\ Mpc$$

با توجه به اینکه قدر ظاهری کوازار داده شده می‌توان قدر مطلق ستاره را محاسبه کرد:

$$m-M=5\ log\left(\frac{d}{10}\right) \rightarrow M=m-5\ log\left(\frac{d}{10}\right)$$

$$M=17-5\ log\left(\frac{203131\times 10^6}{10}\right) \rightarrow M=-19.54$$

با مقایسه‌ی قدر مطلق بلومتریک خورشید و قدر این کوازار می‌توان درخشندگی کوازار را بدست آورد:

$$M_{bol_\odot}=M_\odot+BC \rightarrow M_{bol_\odot}=4.83+(-0.14) \rightarrow \ M_{bol_\odot}=4.69$$

رابطه‌ی قدر برای قدر مطلق‌های خورشید و کوازار را می‌نویسیم:

$$M_q-M_{bol_\odot}=-2.5\ log\left(\frac{L_q}{L_\odot}\right) \rightarrow log\left(\frac{L_q}{L_\odot}\right)=\frac{M_q-M_{bol_\odot}}{-2.5}$$

$$\frac{L_q}{L_\odot}=10^{\frac{M_q-M_{bol_\odot}}{-2.5}} \rightarrow \ L_q=10^{\frac{-19.54-4.69}{-2.5}}L_\odot \rightarrow \ L_q=4.92\times 10^9\ L_\odot$$

کمترین جرم زمانی خواهد بود که کوازار به مرز واپاشی و تابش ادینگتون رسیده باشد.

$$L_{edd}=\frac{4\pi GMm_Hc}{\sigma_H}$$

$\sigma_H=\pi\frac{D^2}{4}$: سطح مقطع اتم هیدورژن

بنابراین جرم مورد نظر در این مرز برابر است با:

$$M = \frac{L_{edd}\,\sigma_H}{4\pi G m_H c} \rightarrow M = \frac{L_{edd}\,D^2}{16 G m_H c}$$

$$M = \frac{4.92 \times 10^{9}\, L_{\odot} \times (1.2 \times 10^{-10})^2}{16 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.67 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{8}}$$

$$M = 5.1 \times 10^{43} \xrightarrow{\div M_{\odot}} M = 2.56 \times 10^{13} \rightarrow \textbf{مرتبه بزرگی} = \mathbf{13}$$

محاسبات سوال ۲ مسئله‌های کوتاه:

$\frac{(1+0.05)^2-1}{(1+0.05)^2+1} \cdot 3 \cdot 10^{8}$	$= 14625445.9$
$\boxed{14625445.9} \cdot 10^{-3}$	$= 14625.4459$
$\frac{\boxed{14625.4459}}{72}$	$= 203.131193$
$17 - 5\log\left(\frac{\boxed{203.131193} \cdot 10^{6}}{10}\right)$	$= -19.5388831$
$4.83 - 0.14$	$= 4.69$
$10^{\frac{-19.54-4.69}{-2.5}}$	$= 4.92039536 \times 10^{9}$
$\frac{\boxed{4.92039536 \times 10^{9}} \cdot 3.85 \cdot 10^{26} \cdot (1.2 \cdot 10^{-10})^2}{16 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{8}}$	$= 5.10199089 \times 10^{43}$
$\frac{\boxed{5.10199089 \times 10^{43}}}{1.99 \cdot 10^{30}}$	$= 2.56381452 \times 10^{13}$

سوال ۳ مسئله‌های کوتاه – (پاسخ نهایی = $\mathbf{12}$)

می‌دانیم که در مدت زمان ک.م.م این سه دوره تناوب، دوباره هم‌خط خواهند شد.

$$[T, 3T, 4T] = 12T$$

در یک راه حل کلی باید ببینیم آیا در زمانی کمتر از $12T$ نیز هم‌خط خواهند شد؟

برای اینکار دوره تناوب نسبی سیاره دوم و سوم را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{3T} - \frac{1}{4T} \rightarrow S = 12T$$

به این نتیجه می‌رسیم که سیاره دوم و سوم زودتر از $\boldsymbol{12T}$ هم‌خط نخواهند شد پس جواب همان $\boldsymbol{12T}$ است. پس مقدار n برابر **۱۲** است.

سوال ۴ مسئله‌های کوتاه – (پاسخ نهایی =12)

علت تغییر اندازه‌ی زاویه‌ای ماه در سرسوی ناظر در شب‌های مختلف، بیضی بودن مدار ماه است. نسبت بزرگترین قطر زاویه‌ای به کوچکترین قطر زاویه‌ای زمانی است که ماه به ترتیب در حضیض و اوج قرار داشته باشد.

$$\theta = \frac{R}{d}$$

این نسبت را می‌نویسیم، در نظر داشته باشیم که شعاع زمین را برای محاسبه‌ی فاصله‌ی ناظر تا ماه باید در نظر بگیریم:

$$\frac{\theta_P}{\theta_A} = \frac{\frac{R_m}{d_P - R_\oplus}}{\frac{R_m}{d_A - R_\oplus}} = \frac{d_A - R_\oplus}{d_P - R_\oplus}$$

در مدار بیضوی فاصله‌ی حضیض (P) و اوج (A) از روابط زیر بدست می‌آید:

$$d_P = a(1-e)\,,\ \ d_A = a(1+e)$$

پس نسبت اندازه‌های زاویه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\theta_P}{\theta_A} = \frac{a(1+e) - R_\oplus}{a(1-e) - R_\oplus} \to \frac{\theta_P}{\theta_A} = \frac{3.84 \times 10^8 (1+0.055) - 6371000}{3.84 \times 10^8 (1-0.055) - 6371000}$$

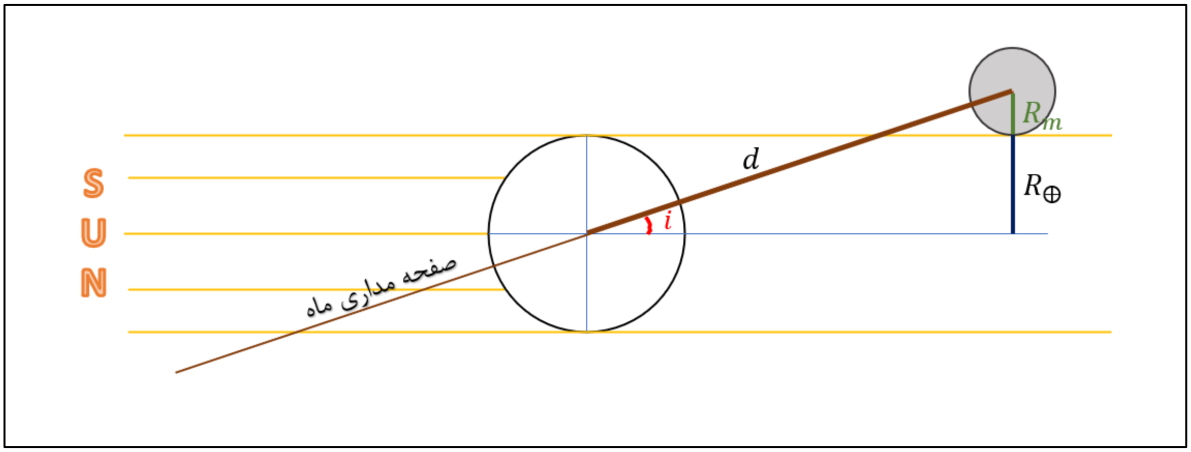
$$\frac{\theta_P}{\theta_A} = 1.1184\ \approx \mathbf{1.12}$$

پس ۱۲ درصد از ۱ بیشتر است.

محاسبات سوال ۴:

$$\frac{3.84 \cdot 10^8 \cdot (1+0.055) - 6\,371\,000}{3.84 \cdot 10^8 \cdot (1-0.055) - 6\,371\,000} = 1.118482282$$

سوال ۵ مسئله‌های کوتاه – (پاسخ نهایی =39)



اگر زاویه‌ی i از مقدار فوق در شکل بزرگتر باشد، ماه می‌تواند در سایه‌ی زمین قرار نگیرد. با توجه به شکل داریم:

$$sin(i) = \frac{R_\oplus + R_m}{d} \xrightarrow{d=\frac{d_m}{30}} sin(i) = \frac{R_\oplus + R_m}{\frac{d_m}{30}} \rightarrow sin(i) = \frac{30(R_\oplus + R_m)}{d_m}$$

$$sin(i) = \frac{30 \times (6371 + 1737) \times 10^3}{3.84 \times 10^8} \rightarrow i = 39.3 \rightarrow \boldsymbol{i \approx 39}$$

محاسبات سوال ۵ مسئله‌های کوتاه:

$$\frac{30(6371 + 1737) \cdot 10^3}{3.84 \cdot 10^8} = 0.6334375$$

$$\sin^{-1}(0.6334375) = 39.30419286$$

سوال ۶ مسئله‌های کوتاه – (پاسخ نهایی = 46)

با برابر گذاشتن انرژی جنبشی و پتانسیل یک ذره، سرعت فرار آن به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \rightarrow \ v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

باید حساب کنیم تا در چه فاصله‌ای از خورشید، سرعت فرار برابر ۲۰ کیلومتر بر ثانیه است. زیرا ذراتی که داخل این فاصله قرار دارند نمی‌توانند فرار کنند و ذراتی که خارج این فاصله قرار دارند می‌توانند فرار کنند.

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \rightarrow \ v_{esc}^2 = \frac{2GM}{r} \rightarrow r = \frac{2GM_{\odot}}{v_{esc}^2} \rightarrow r = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}{(20 \times 10^3)^2}$$

$$r = 1.33 \times 10^{11} \rightarrow r = 4.42\ AU$$

برای محاسبه‌ی تعداد ذراتی که نمی‌توانند فرار کنند چون چگالی سطحی این دیسک ثابت است:

$$\sigma = \frac{n}{S}$$

پس تعداد ذرات برابر است با:

$$n = \sigma S$$

پس نسبت ذراتی که فرار نمی‌کنند به کل ذرات برابر است با:

$$\frac{n}{n_{\text{کل}}} = \frac{\sigma S}{\sigma S_{\text{کل}}} = \frac{\pi\, r^2}{\pi\, r_{\text{کل}}^{\ 2}} \rightarrow \frac{n}{n_{\text{کل}}} = \left(\frac{r}{r_{\text{کل}}}\right)^2 \rightarrow \frac{n}{n_{\text{کل}}} = \left(\frac{4.42}{6}\right)^2 = 0.544$$

پس درصد تعداد ذراتی فرار می‌کنند برابر است با:

$$(1 - 0.544) \times 100 = 45.6\% \ \approx \boldsymbol{46\%}$$

محاسبات سوال ۶ مسئله‌های کوتاه:

$$\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{\left(20 \cdot 10^3\right)^2} = 6.63665 \times 10^{11}$$

$$\frac{\boxed{6.63665 \times 10^{11}}}{1.5 \cdot 10^{11}} = 4.424433333$$

$$\left(\frac{\boxed{4.424433333}}{6}\right)^2 = 0.5437669534$$

$$\left(1 - \boxed{0.5437669534}\right) \cdot 100 = 45.62330466$$

سوال ۷ مسئله‌های کوتاه – (پاسخ نهایی = 21)

باید ببینیم در شب هفتم ماه قمری فاز ماه (درصد روشن سطح) ماه چقدر است.

فاز از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\text{فاز:}\ \frac{1-cos\,(\varphi)}{2}$$

در روز هفتم ماه قمری مقدار زاویه‌ای θ را باید محاسبه کنیم.

$$\theta = \omega\, t \rightarrow \theta = \frac{360}{29} \times 7 \rightarrow \theta = 86.896°$$

پس فاز ماه برابر است با:

$$\text{فاز:}\ \frac{1-cos\,(86.896)}{2} = 0.473$$

شار رسیده از ماه رابطه‌ی مستقیم با درصد مساحت روشن از سطح ماه دارد. فاز ماه در حالت ماه کامل برابر ۱ است، بنابرین نسبت شار دریافتی از ماه شب هفتم به ماه کامل برابر است با:

$$\frac{f_{\text{ماه کامل}}}{f} = \frac{1}{0.473} \rightarrow \frac{f_{\text{ماه کامل}}}{f} = 2.11 = A$$

$$10A = 21.1 \ \approx \mathbf{21}$$

محاسبات سوال ۷ مسئله‌های کوتاه:

$$\frac{360}{29} \cdot 7 = 86.89655172$$

$$\frac{1-\cos\left(86.89655172\right)}{2} = 0.4729305457$$

$$\frac{1}{0.4729305457} = 2.11447539$$

سوال ۸ مسئله‌های کوتاه – (پاسخ نهایی = 39)

برای حل این سوال باید مساحت قسمت مشترک دو دایره یعنی $OAO'B$ را محاسبه کنیم. برای اینکار ابتدا مساحت ناحیه‌ی قرمز رنگ $AO'B$ را محاسبه می‌کنیم و سپس به دلیل هم‌اندازه بودن ماه و خورشید و تقارن آن را در ۲ ضرب می‌کنیم.

برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی قرمز ابتدا مساحت قطاع OAB که قطاعی از دایره با زاویه راس $O_1 + O_2$ می‌باشد را حساب کرده و مساحت مثلث OAB را از آن کم می‌کنیم.

$$\cos O_1 = \frac{\frac{OO'}{2}}{OA}$$

طبق اطلاعات مسئله OO' فاصله‌ی مراکز ماه و خورشید و برابر ۱۵ دقیقه قوس و OA شعاع خورشید و برابر ۳۰ دقیقه قوس است. در نتیجه:

$$\cos O_1 = \frac{\frac{15}{2}}{15} \to O_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \to O_1 = 60^\circ$$

(با توجه به اینکه OAO' متساوی‌الضلاع هست نیز می‌توان نتیجه گرفت زاویه O_1 برابر ۶۰ درجه است.)

پس مساحت قطاع دایره به مرکزیت O و زاویه‌ی $O_1 + O_2$ به دست می‌آید:

$$S_{\text{قطاع دایره}} = \frac{O_1 + O_2}{360} \times \pi r_\odot^2 \xrightarrow{O_1 = O_2} S_{\text{قطاع دایره}} = \frac{2.O_1}{360} \times \pi r_\odot^2 \quad (I)$$

مساحت مثلث OAB از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$S_{OAB} = \frac{OM \times AB}{2}$$

$$\frac{AB}{2} = OA.\sin(O_1) \xrightarrow{OA = r_\odot} AB = 2.r_\odot.\sin(O_1) \quad \text{و} \quad OM = \frac{OO'}{2} \to OM = \frac{r_\odot}{2}$$

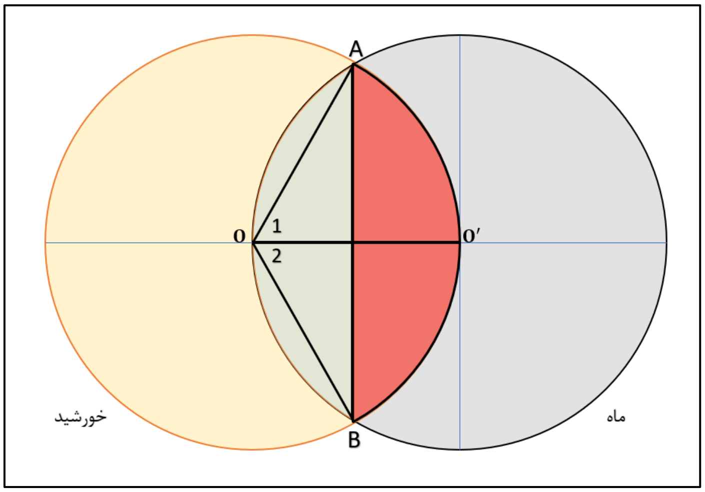
$$S_{OAB} = \frac{r_\odot^2.\sin(O_1)}{2} \quad (II)$$

مساحت قرمز رنگ با کم‌کردن مساحت‌های محاسبه شده در قسمت II و I بدست می‌آید. و مساحت قسمت مشترک دوبرابر این مقدار خواهد بود.

$$S_{\text{ناحیه مشترک}} = 2\left[\frac{2.O_1}{360} \times \pi r_\odot^2 - \frac{r_\odot^2.\sin(O_1)}{2}\right]$$

برای محاسبه‌ی درصد گرفت، کافیست تا نسبت مساحت‌ها را محاسبه کنیم و برای اینکار مساحت ناحیه مشترک بدست آمده را تقسیم بر مساحت خورشید می‌کنیم و حاصل را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم.

$$\text{درصد گرفت} = \frac{2\left[\frac{2.O_1}{360}\times\pi r_\odot^2 - \frac{r_\odot^2 . sin(O_1)}{2}\right]}{\pi r_\odot^2}\times 100 = \frac{2\left[\frac{2.O_1}{360}\times\pi - \frac{sin(O_1)}{2}\right]}{\pi}\times 100 = \mathbf{39.1\%}$$



محاسبات سوال ۸ مسئله‌های کوتاه:

$$\frac{2\left(\frac{2\cdot 60}{360}\cdot\pi - \frac{\sin(60)}{2}\right)}{\pi}\cdot 100 \qquad = 39.1002219$$

پایان

موفق باشید