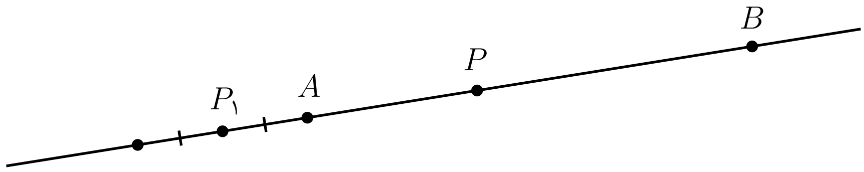
۱. روی خطی دو نقطه‌ی متمایز A و B قرار دارند. یکی از نقاط روی پاره‌خط AB، به غیر از نقاط A، B و وسط پاره‌خط AB، را قرمز می‌کنیم. در هر مرحله یک نقطه‌ی قرمز را نسبت به یکی از نقاط A و B قرینه می‌کنیم، سپس فاصله‌ی نقطه‌ی جدید تا همان نقطه را نصف می‌کنیم و نقطه‌ی حاصل را قرمز می‌کنیم. برای مثال در شکل زیر اگر P یک نقطه‌ی قرمز باشد می‌توانیم P را نسبت به A قرینه کنیم سپس فاصله‌ی نقطه‌ی حاصل تا A را نصف کنیم تا به نقطه‌ی $P_۱$ برسیم و آن را قرمز کنیم.



آیا ممکن است پس از متناهی مرحله نقطه‌ی وسط AB قرمز شود؟

راه حل.

خط داده شده را محور اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم به طوری که A منطبق بر صفر و B منطبق بر ۲ باشد. فرض کنید پس از متناهی مرحله نقطه‌ی ۱ قرمز شود. دقت کنید عمل عکسِ عمل تعریف‌شده در صورت مسئله به این شکل است: یکی از دو نقطه‌ی A و B را نسبت به یکی از نقاط قرمز قرینه می‌کنیم، سپس نقطه‌ی حاصل را نسبت به همان نقطه قرینه می‌کنیم. نقطه‌ی حاصل نیز باید یک نقطه‌ی قرمز باشد. پس اگر نقطه‌ی x قرمز شده باشد طبق عمل عکس، در مرحله‌ی قبل باید یکی از نقاط $-۲x$ و $۲x-۶$ قرمز شده باشند. از آنجا که ۱ قرمز شده است در مرحله‌ی قبل یکی از نقاط -۲ و ۴ قرمز شده‌اند. حال نشان می‌دهیم اگر نقطه‌ی $x_۱ \in (-\infty,-۲] \cup [۴,\infty)$ قرمز باشد نقاطی که در مراحل قبل از آن قرمز شده‌اند نیز همه باید در همین بازه قرار داشته باشند. طبق عمل عکس، در مرحله‌ی قبل از قرمز شدن $x_۱$ یکی از دو نقطه‌ی $-۲x_۱$ و $۲x_۱-۶$ قرمز شده‌اند. حال دقت کنید که

$$۶-۲x_۱ \le -۲ \quad \text{یا} \quad ۱۰ \le ۶-۲x_۱ \qquad \text{و} \qquad -۲x_۱ \le -۸ \quad \text{یا} \quad ۴ \le -۲x_۱$$

پس $-۲x_۱$ و $۲x_۱-۶$ نیز هر دو در بازه‌ی $(-\infty,-۲] \cup [۴,\infty)$ قرار دارند. در نتیجه هیچ‌گاه نمی‌توانیم از این بازه خارج شویم که با انتخاب اولین نقطه‌ی قرمز در تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و نقطه‌ی وسط AB پس از متناهی مرحله نمی‌تواند قرمز شود.

۲. عدد طبیعی n را خوب می‌نامیم اگر رقم صفر نداشته باشد و بتوانیم یکی از ارقامش را حذف کنیم به طوری که عدد حاصل مقسوم علیه n شود. برای مثال ۲۵ یک عدد خوب است زیرا اگر رقم ۲ را حذف کنیم عدد حاصل برابر با ۵ می‌شود که مقسوم علیه ۲۵ است. ثابت کنید تعداد اعداد خوب متناهی است.

راه حل.

فرض کنید n یک عدد خوب باشد. ارقام عدد طبیعی n را به شکل $\overline{abc}$ نشان می‌دهیم که b تنها یک رقم است که با حذف آن به یک مقسوم علیه n می‌رسیم اما a و c ممکن است از چند رقم تشکیل شده باشند. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $a \neq ۰$. همچنین فرض کنید b از سمت راست رقم tاِم n باشد. پس در واقع داریم $n = ۱۰^t a + ۱۰^{t-۱} b + c$ و اگر رقم b را حذف کنیم به عدد $۱۰^{t-۱}a + c$ می‌رسیم. در نتیجه

$$\left.\begin{array}{l} ۱۰^{t-۱}a + c \mid ۱۰^t a + ۱۰^{t-۱}b + c \\ ۱۰^{t-۱}a + c \mid ۱۰^t a + ۱۰c \end{array}\right\} \Longrightarrow ۱۰^{t-۱}a + c \mid ۱۰^{t-۱}b - ۹c$$

دقت کنید که $|۱۰^{t-۱}b - ۹c|$ حداکثر t رقم دارد. حال اگر a حداقل دو رقم داشته باشد، $۱۰^{t-۱}a + c$ حداقل $t+۱$ رقم دارد پس تنها حالت ممکن این است که $۱۰^{t-۱}b - ۹c$ برابر با صفر باشد. این نیز نتیجه می‌دهد $c \mid ۱۰^{t-۱}$ که امکان ندارد زیرا $c < ۱۰^{t-۱}$. در نتیجه a باید یک رقم داشته باشد. توجه کنید که

$$۲۰\left(۱۰^{t-۱}a + c\right) = ۲ \times ۱۰^t a + ۲۰c > ۱۰^t a + ۱۰^{t-۱}b + c$$

پس اگر قرار دهیم $۱۰^t a + ۱۰^{t-۱}b + c = k\left(۱۰^{t-۱}a + c\right)$، نتیجه می‌شود $k < ۲۰$. از طرف دیگر می‌توان نوشت

$$۱۰^{t-۱}\left((۱۰-k)a + b\right) = c(k-۱) \Longrightarrow ۱۰^{t-۱} \mid c(k-۱)$$

از آنجا که n رقم صفر ندارد c نسبت به حداقل یکی از دو عدد $۲^{t-۱}$ و $۵^{t-۱}$ اول است. اگر $(c, ۲^{t-۱}) = ۱$ آنگاه طبق لم اقلیدس نتیجه می‌شود

$$۲^{t-۱} \mid k-۱ \Longrightarrow ۲^{t-۱} \leq k-۱ < ۱۹ \Longrightarrow t \leq ۵$$

حالتی که $(c, ۵^{t-۱}) = ۱$ نیز به طور مشابه نتیجه می‌دهد $t \leq ۲$ پس n حداکثر ۶ رقمی است. حال به سراغ حالت $a = ۰$ می‌رویم. در این حالت داریم $n = ۱۰^{t-۱}b + c$ و با حذف b به عدد c می‌رسیم. در نتیجه

$$c \mid ۱۰^{t-۱}b + c \Longrightarrow c \mid ۱۰^{t-۱}b$$

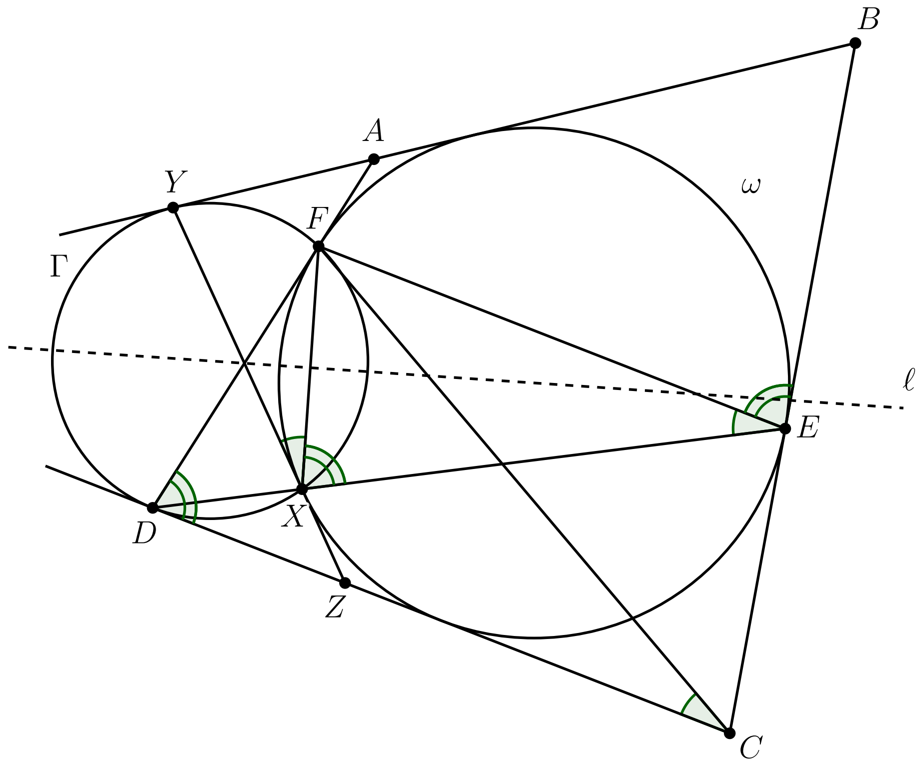
مشابه قبل دو حالت برای c داریم. اگر $(c, ۲^{t-۱}) = ۱$ طبق لم اقلیدس نتیجه می‌شود

$$c \mid ۵^{t-۱}b \Longrightarrow ۱۰^{t-۲} \leq c \leq ۵^{t-۱}b \leq ۵^{t-۱} \times ۹ \Longrightarrow ۲^{t-۲} \leq ۴۵ \Longrightarrow t \leq ۷$$

برای حالت $(c, 5^{t-1}) = 1$ نیز مشابهاً نتیجه می‌شود $t \leq 3$ پس n حداکثر ۷ رقم دارد و تعداد اعداد خوب متناهی است.

۳. چهارضلعی محیطی $ABCD$ با دایره محاطی ω مفروض است. ω در نقاط E و F بر BC و AD مماس است و DE برای بار دوم ω را در X قطع می‌کند. اگر دایره محیطی مثلث DXF بر خطوط AB و CD مماس باشد، ثابت کنید چهارضلعی $AFXC$ محاطی است.

راه حل.
دایره محیطی مثلث DXF را Γ و عمودمنصف FX را ℓ می‌نامیم. دقت کنید که خطوط AB و CD مماس مشترک‌های خارجی دوایر Γ و ω هستند، پس نسبت به ℓ قرینه یکدیگرند. فرض کنید AB در Y بر Γ مماس باشد و Z قرینه A نسبت به ℓ باشد. اگر خط FD را نسبت به ℓ قرینه کنیم به خط XY تبدیل می‌شود پس از آنجا که FD از A می‌گذرد، XY نیز از Z می‌گذرد.



واضح است که چهارضلعی $AFXZ$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است پس چهار نقطه A، F، X و Z روی یک دایره قرار دارند و اگر نشان دهیم دایره محیطی مثلث FXZ از C می‌گذرد حکم ثابت می‌شود. دقت کنید که

$$\angle BEF = \angle FXE = \frac{\widehat{FXD}}{۲} = \angle FDC$$

پس چهارضلعی $FECD$ محاطی است. در نتیجه

$$\angle FCZ = \angle FCD = \angle FED = \angle FEX = \angle FXY = ۱۸۰^\circ - \angle FXZ$$

که محاطی بودن چهارضلعی $FXZC$ را نشان می‌دهد و حکم نتیجه می‌شود.

۴. n نقطه روی محیط دایره‌ی ω قرار دارند. می‌دانیم دایره‌ای با شعاع کم‌تر از ω وجود دارد که همه‌ی n نقطه داخل یا روی آن باشند. ثابت کنید قطری از ω وجود دارد که دو سر آن جزء نقاط نباشند و همه‌ی نقاط در یک سمت آن قرار گیرند.

راه حل.

فرض کنید O مرکز ω و O' مرکز دایره‌ی با شعاع کم‌تر باشد. از O خطی عمود بر OO' رسم می‌کنیم تا ω را در A و B قطع کند. نشان می‌دهیم AB قطر مورد نظر است. فرض کنید نقطه‌ی P طرف دیگر AB نسبت به O' یا روی آن قرار داشته باشد. واضح است که $\angle POO' \geq ۹۰^\circ$ در نتیجه $PO' > PO$. پس P نمی‌تواند یکی از n نقطه باشد زیرا فاصله‌ی هر یک از این نقاط از O' کم‌تر از فاصله‌ی آن از O است. این نتیجه می‌دهد همه‌ی نقاط همان طرف AB قرار دارند که O' قرار دارد و حکم ثابت می‌شود.

۵. ۱۴۰۰ عدد حقیقی داده شده‌اند. ثابت کنید حداقل سه‌تا از این اعداد مانند x، y و z وجود دارند که

$$\left|\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^۴+y^۴+z^۴+۱}\right| < \frac{۹}{۱۰۰۰}$$

راه حل.
قرار دهید $c = \frac{۹}{۱۰۰۰}$ و $n = ۱۴۰۰$. فرض خلف می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم برای هر سه عدد x، y و z که $x \geq y \geq z$ داشته باشیم

$$(z-y)(y-x)(z-x) \geq c\left(x^۴+y^۴+z^۴+۱\right). \tag{۱}$$

دقت کنید که برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم $(a+b)^۲ \geq ۴ab$، زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^۲ \geq ۰$ که درستی آن واضح است. حال با استفاده از این نامساوی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}(z-x)^۲ \geq ۴(z-y)(y-x) \Longrightarrow (z-x)^۳ &\geq ۴(z-y)(y-x)(z-x)\\ &\overset{(۱)}{\geq} ۴c\left(x^۴+y^۴+z^۴+۱\right)\\ &\geq ۴c\left(x^۴+z^۴+۱\right)\end{aligned} \tag{۲}$$

توجه کنید که نامساوی آخر نتیجه می‌دهد

$$z-x \geq \sqrt[۳]{۴c} \tag{۳}$$

همچنین از طرف دیگر طبق (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{(z-x)^۳}{x^۴+z^۴} > ۴c \tag{۴}$$

دقت کنید که $(a+b)^۲ \leq ۲\left(a^۲+b^۲\right)$ زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^۲ \geq ۰$. با دو بار استفاده از این نامساوی نتیجه می‌شود

$$(z-x)^۴ \leq ۴\left(x^۲+z^۲\right)^۲ \leq ۸\left(x^۴+z^۴\right) \overset{(۴)}{\Longrightarrow} \frac{۸}{z-x} > ۴c \Longrightarrow z-x < \frac{۲}{c} \tag{۵}$$

حال فرض کنید اعداد داده شده $x_n \leq \cdots \leq x_۲ \leq x_۱$ باشند. از (۳) نتیجه می‌شود $x_{k+۲} - x_k > \sqrt[۳]{۴c}$ در نتیجه

$$\frac{۲}{c} > x_n - x_۱ > \left\lfloor\frac{n-۱}{۲}\right\rfloor \sqrt[۳]{۴c} \Longrightarrow c < \frac{۲^{\frac{۱}{۴}}}{\left\lfloor\frac{n-۱}{۲}\right\rfloor^{\frac{۳}{۴}}} \approx \frac{۸۷}{۱۰۰۰۰}$$

که تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود.

۶. آیا چینشی از ۱۴۰۰ عدد طبیعی (نه لزوماً متمایز) دور دایره وجود دارد به طوری که حداقل یکی از اعداد ۲۰۲۱ باشد و هر عدد برابر با مجموع ب.م.م دو عدد بعدی و ب.م.م دو عدد قبلی خود باشد؟ برای مثال اگر a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند باید داشته باشیم $c = (a, b) + (d, e)$.

راه حل.

فرض کنید ب.م.م همه اعداد دور دایره برابر با k باشد. در این صورت اگر همه اعداد را بر k تقسیم کنیم چینش جدید نیز خواص مسئله را دارد و تنها تفاوت آن این است که حداقل یکی از اعداد برابر با یکی از مقسوم علیه‌های ۲۰۲۱ است. پس فرض می‌کنیم ب.م.م اعداد دور دایره برابر با ۱ است.

لم ۱. ب.م.م هر سه عدد متوالی برابر با ۱ است.

برهان. فرض کنید a، b، c، d و e پنج عدد متوالی دور دایره باشند و سه عدد a، b و c عامل مشترک p را داشته باشند. از تساوی $c = (a, b) + (d, e)$ نتیجه می‌شود d و e نیز بر p بخش‌پذیرند و به همین ترتیب همه اعداد دور دایره بر p بخش‌پذیر می‌شوند، پس p باید برابر با ۱ باشد و این یعنی ب.م.م هر سه عدد متوالی ۱ است. □

لم ۲. اگر a، b و c سه عدد متوالی دور دایره باشند آنگاه $c > (a, b)$.

برهان. از شرط مسئله و این که ب.م.م همواره عددی مثبت است حکم نتیجه می‌شود. □

فرض کنید m عدد بیشینه بین تمام اعداد دور دایره باشد و x، y، m، z و t به همین ترتیب دور دایره قرار داشته باشند. از آنجا که مجموع دو عدد طبیعی حداقل ۲ است، ۱ نمی‌تواند در بین اعداد دور دایره ظاهر شود. همچنین $m > ۴$ است زیرا ۲۰۲۱ بر هیچ‌یک از اعداد ۲، ۳ و ۴ بخش‌پذیر نیست. طبق تساوی $m = (x, y) + (z, t)$ یکی از اعداد (x, y) و (z, t) باید حداقل $\frac{m}{۲}$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $(x, y) \geq \frac{m}{۲}$. اگر $x \neq y$ آنگاه یکی از دو عدد حداقل m است و از آنجا که m عدد بیشینه بود باید برابر با m باشد. طبق لم ۲، y نمی‌تواند برابر با m باشد پس باید داشته باشیم $y = \frac{m}{۲}$ و $x = m$. این نیز نتیجه می‌دهد $(z, t) = \frac{m}{۲}$. مشابه قبل z نمی‌تواند برابر با m باشد پس $z = \frac{m}{۲}$. اما از آنجا که y، m و z متوالی هستند طبق لم ۲ به تناقض می‌رسیم. پس فرض $x \neq y$ باطل می‌شود و باید داشته باشیم $x = y \geq \frac{m}{۲}$. حال فرض کنید عدد قبل از x، w باشد. از لم ۱ نتیجه می‌شود $(w, x) = ۱$ پس می‌توان نوشت

$$x = (w, x) + (m, z) = ۱ + (m, z) \Longrightarrow x - ۱ \mid m$$

اگر m فرد باشد، از آنجا که $\frac{m+۱}{۲} \leq x \leq m$ باید داشته باشیم $\frac{m-۱}{۲} \leq \frac{m}{۳}$ که نتیجه می‌دهد $m \leq ۳$ و این با فرض $m > ۴$ در تناقض است. پس m باید زوج باشد و از آنجا که $\frac{m}{۲} \leq x \leq m$ تنها حالت ممکن $x = \frac{m}{۲} + ۱$ است. پس $(m, z) = \frac{m}{۲}$ که نتیجه می‌دهد $z = \frac{m}{۲}$. از طرف دیگر داریم

$$m = (x, x) + (z, t) = \frac{m}{۲} + ۱ + \left(\frac{m}{۲}, t\right) \Longrightarrow \frac{m}{۲} - ۱ \;\Big|\; \frac{m}{۲} \Longrightarrow \frac{m}{۲} - ۱ \;\Big|\; ۱ \Longrightarrow m = ۴$$

که این نیز با فرض $m > ۴$ در تناقض است. پس چنین چینشی وجود ندارد.